1. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\{0\} \subset \{0,\ 1\}$	㉡ $\varnothing \in \{\varnothing\}$	㉢ $1 \in \{1,\ 2\}$
㉣ $\varnothing \subset \{\varnothing,\ 0\}$	㉤ $\{a\} \subset \{a,\ b\}$	

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 옳다.

2. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 일 때, $X\subset A$, $A-X=\{1,4\}$를 만족하는 집합 X의 원소를 모두 더하면?

① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 15

해설

$X\subset A, A-X=\{1,4\}\Rightarrow X=\{2,3,5\}$

$\therefore 2+3+5=10$

3. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2^{(1\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$

4. 3 학년 3 반 33 명의 학생 중에서 컴퓨터를 가지고 있는 학생이 25 명, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생이 10 명, 컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명이다. 컴퓨터와 홈페이지를 모두 가지고 있는 학생 수는?

① 3 명　② 5 명　③ 7 명　④ 9 명　⑤ 11 명

해설

컴퓨터를 가지고 있는 학생을 집합 A 라 하고, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생을 집합 B 라 하자.
컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명이므로 합집합의 원소의 개수는 $33 - 3 = 30$ 이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$30 = 25 + 10 - x$
$x = 5$

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \cup B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $A - B = \{1, 5\}$, $A \cap B = \{3,\ 7\}$, $(A \cup B)^c = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $n(U) = 9$

② 전체집합을 조건제시법으로 나타내면 $U = \left\{x | x\text{는 } 9\text{미만의 자연수}\right\}$ 이다.

③ $B - A = \{9\}$

④ $n(A^c \cap B^c) = 4$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1,\ 5,\ 9\}$

해설

$(A \cup B) \cup (A \cup B)^C = U$ 이므로
전체집합을 조건제시법으로 나타내면
$U = \left\{x | x\text{는 } 9\text{이하의 자연수}\right\}$ 또는
$U = \left\{x | x\text{는 } 10\text{미만의 자연수}\right\}$ 이다.

6. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은?

① $p : x = -1,\ q : |x| = 1$

② p : △ABC 에서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$, q : △ABC 는 이등변삼각형

③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, $a,\ b$ 는 실수), $q : a = b = 0$

④ $p : x + y \geq 2,\ xy \geq 1,\ q : x \geq 1,\ y \geq 1$

⑤ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

해설

① 두 조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하면 $P = \{-1\}$, $Q = \{-1,\ 1\}$ 이므로 $P \subset Q,\ Q \not\subset P$
따라서, $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ 이므로
p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이면 △ABC 는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그런데 △ABC 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 인 것은 아니다.
$\therefore q \nRightarrow p$
③ $a,\ b$ 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x + y \geq 2,\ xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 인 것은 아니다.
$\therefore\ p \nRightarrow q$
⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

7. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

> [(가)] - [(나)]
> $= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
> $= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
> $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)]
> 따라서, [(가)] $\geq$ [(나)]
> 한편, 등호는 [(라)] 일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$

② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

8. 집합 $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $Z = \{4,5,6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$와 함수 $g : Y \to Z$가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a　　② b　　③ c

④ b, c　　⑤ a, b, c

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$이어야 한다.
(i) $f(2) = b$인 경우 $f(1) = a$이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$인 경우 $g(c) = 6$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
$(g \circ f)(2) = 4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g \circ f$도 일대일대응이다.
$(g \circ f)(2) = 4$에서
$g(f(2)) = 4$이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2) = b$이어야 한다.
$\therefore f(3) = c$

9. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

10. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항의 합은?

① -75 ② -76 ③ -77 ④ -78 ⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 25n) - \left\{2(n-1)^2 - 25(n-1)\right\} \\ &= 4n - 27 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$일 때

$a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = -23$

(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27$ $(n \geq 1)$

한편, $a_n = 4n - 27 < 0$에서 $n < \frac{27}{4} = 6.75$

따라서 첫째항부터 제 6항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2}\left\{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\right\} = -78$$

11. 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설

$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠
따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면
㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로
$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

12. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.

② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

③ n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개다.

④ n이 짝수일 때, 16의 n제곱근 중 실수인 것은 ±3이다.

⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ±3이다.

해설

$x^n = a$인 실수 x의 개수는 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때, 실수 x는 $\sqrt[n]{a}$로 1개 이다.
(ii) n이 짝수일 때,
$a > 0 \rightarrow$ 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{a}$로 2개 이다.
$a = 0 \rightarrow$ 실수 x는 0이므로 1개 이다.
$a < 0 \rightarrow$ 실수 x는 존재하지 않는다.
① $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
② $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
③ n이 홀수이므로 실수인 n제곱근은 1개
④ n이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n제곱근은 2개
⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$이므로 실수인 n제곱근은 존재하지 않는다.

13. $x + x^{-1} = 3$일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\sqrt{3}$　② 3　③ 5　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$x + x^{-1} = 3$이므로

$(x + x^{-1})^3 = 27$

$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$

$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$

$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$

$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5}$ $(\because\ x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$

14. 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$일 때, $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$의 값은?

① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$\log_a b = \sin x$에서 $b = a^{\sin x}$

$\log_a c = \cos x$에서 $c = a^{\cos x}$

$$\begin{aligned} \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

15. 집합 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2a\}$, $B = \{x \mid 1 - a \leq x < 8\}$에 대하여 $A \cap B = A$일 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

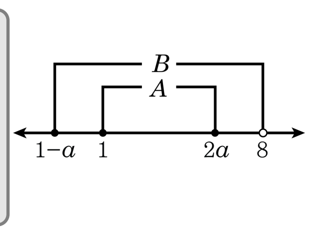
해설

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

$\therefore 1 - a \leq 1$ 그리고 $2a < 8$

$\Rightarrow 0 \leq a < 4,\ a = 0, 1, 2, 3$

따라서 정수 a의 개수는 4개이다.



16. 전체집합 $U=\left\{x \mid x\text{는 20이하의 소수}\right\}$ 에 대하여 $A=\{2,\ 7,\ 11\}$, $B=\{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B=\{7,\ 11\}$

② $A \cap B^{c}=\{2\}$

③ $A^{c} \cap B=\{3,\ 17\}$

④ $A^{c} \cup B^{c}=\{2,\ 3,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A^{c} \cap B^{c}=\{5,\ 13,\ 19\}$

해설

$U=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$,
$A=\{2,\ 7,\ 11\}$, $B=\{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$
② $A \cap B^{c}=A-B=\{2\}$
③ $A^{c} \cap B=B-A=\{3,\ 17\}$
④ $A^{c} \cup B^{c}=(A \cap B)^{c}=\{2,\ 3,\ 5,\ 13,\ 17,\ 19\}$
⑤ $A^{c} \cap B^{c}=(A \cup B)^{c}=\{5,\ 13,\ 19\}$

17. 다음은 명제 'xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

> 주어진 명제의 대우는 'x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.' 이다. 이것이 참임을 보이자.
> x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1$, $y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
> $= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
> $= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
> 또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
> $= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
> $= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
> 이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
> $3mn \pm m \pm n$, $3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
> 따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

① (가) 3의 배수　② (나) 3의 배수　③ (다) xy
④ (라) 참　⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

18. 제곱의 합이 일정한 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$　　② $a=2b$　　③ $a=b$

④ $a^2=b$　　⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$ ……㉠

㉠에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right)=12\left(\frac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

20. 첫째항이 31, 공차가 -2 인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220 인 모든 n 의 값의 합은?

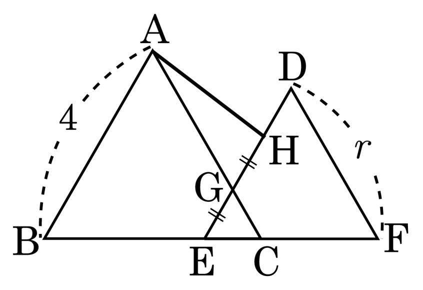
① 10 ② 22 ③ 32 ④ 44 ⑤ 56

해설

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2}$$
$$= n\{31 - (n-1)\}$$
$$= n(32 - n)$$
$$= -n^2 + 32n = 220$$

$\therefore$ n 의 값의 합은 32

21. 아래쪽 그림과 같이 한변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 r인 정삼각형 DEF를 점 E가 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{\mathrm{EG}} = \overline{\mathrm{GH}}$가 되도록 점 H를 $\overline{\mathrm{DG}}$ 위에 잡는다. $\triangle$GEC, $\triangle$AGH, $\triangle$DEF 의 각각의 넓이가 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, r의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{2}{7}$

해설

$\overline{\mathrm{EC}} = a$라 하면 정삼각형 GEC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\angle\mathrm{AGH} = \angle\mathrm{EGC} = 60°$ 이므로 $\triangle$AGH의 넓이는

$\frac{1}{2}a(4-a)\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}a(4-a)$

정삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

$\triangle$GEC, $\triangle$AGH, $\triangle$DEF의 넓이가 공비가 r인 등비수열을 이루므로

$\triangle\mathrm{AGH} = r \times \triangle\mathrm{GEC}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{4}a(4-a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 r$

$4 - a = ar \cdots\cdots$ ㉠

$\triangle\mathrm{DEF} = r \times \triangle\mathrm{AGH}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}ar(4-a)$

$r = a(4-a) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 3$

22. $A = \sqrt[3]{9},\ B = \sqrt{27},\ C = \sqrt[4]{81}$ 일 때, A, B, C 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

① $A < C < B$　② $C < A < B$　③ $B < A < C$

④ $B < C < A$　⑤ $A < B < C$

해설

$\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[4]{81} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$

$\therefore A < C < B$

23. 어떤 휴대용 계산기에서 근호 ($\sqrt{\ }$)가 표시된 키(key)를 누르면, 계산기는 화면에 나타난 수의 양의 제곱근의 근삿값을 화면에 나타낸다. 또, x^{-1} 가 표시된 키(key)를 누르면, 화면에 나타난 수의 역수를 화면에 나타낸다. 화면에 3이 나타나 있을 때, 근호($\sqrt{\ }$) 키와 x^{-1} 키를 번갈아가면서 세 번씩 누를 때, 화면에 나타난 수는 어떤 수의 근삿값인가?

① $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ③ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ④ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{3}}$ ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}$

해설

$(\sqrt{3})^{-1} = 3^{\frac{-1}{2}}$

$\left\{(3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{8}}$

24. $a=\sqrt[3]{8+4\sqrt{2}},\ b=\sqrt[3]{8-4\sqrt{2}}$ 이고 $\log_3(a^3+b^3)$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$a^3+b^3=(8+4\sqrt{2})+(8-4\sqrt{2})=16$

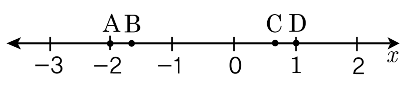
$\log_3(a^3+b^3)=\log_3 16$

그런데, $\log_3 16$ 의 정수부분이 2 이므로

$\alpha=\log_3 16-2=\log_3\frac{16}{9}$

$\therefore\ 3^\alpha=\frac{16}{9}$

25. 다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 $A(-2)$, $B(\log a)$, $C(\log b)$, $D(1)$이 있다.



$-2 < \log a < -1$, $0 < \log b < 1$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a + b = 1$　② $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{b}{a} = 10$

④ $ab = \dfrac{1}{10}$　⑤ $ab = 10$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\log a + 2 = 1 - \log b$

$\log a + \log b = \log ab = -1$

$ab = \dfrac{1}{10}$

26. 양수 A에 대하여 $A = n + a$(n은 정수, $\frac{2}{3} < a < 1$) 일 때, $\left[\log \frac{1}{A^3}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-3n-3$ ② $-3n-2$ ③ $-3n-1$
④ $-3n$ ⑤ $-3n+1$

해설

$\log \frac{1}{A^3} = \log A^{-3} = -3\log A$
$= -3(n+\alpha) = -3n - 3\alpha$
이때, $\frac{2}{3} < a < 1$이므로 $-3 < -3\alpha < -2$
$\therefore \left[\log \frac{1}{A^3}\right] = -3n-3$

27. 집합 X, Y 에 대하여 $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$라 하자. 집합 A, B, C가 $n(A \cup B \cup C) = 90$, $n(A \triangle B) = 40$, $n(B \triangle C) = 36$, $n(C \triangle A) = 58$일 때, $n(A \cap B \cap C)$를 구하면?

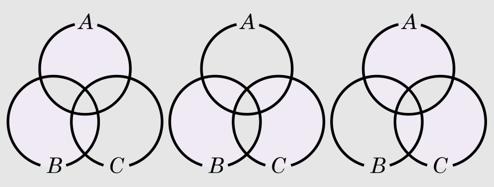
① 15 ② 17 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

해설

다음 벤 다이어그램에서 $n(A \triangle B) + n(B \triangle C) + n(C \triangle A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\}$

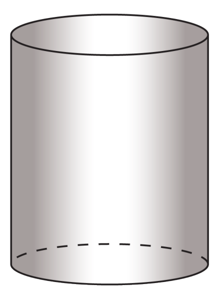
$\therefore\ 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\}$

$\therefore\ n(A \cap B \cap C) = 23$



$A \triangle B$ $B \triangle C$ $C \triangle A$

28. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?

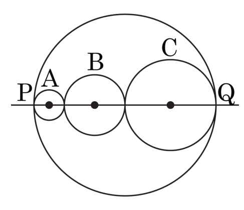


① 110만원　② 104만원　③ 100만원
④ 96만원　⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를
x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$
$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$
$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$
단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

29. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$

30. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면
$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$
$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$
위 식은 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ b=1$
이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

31. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 두 함수 $f,\ g$가 일대일 대응이고 $f(2) = 1$, $g(3) = 3$, $(f \circ g)(1) = 2$일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$g(3) = 3$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$이다.
만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.
그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.
따라서 $g(1) = 1$ 이다.
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고
$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.
$g(1) = 1$, $g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

32. 네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(a+b)(c+d) \ge 4ad$

㉡ $a+b+c+d \ge 4\sqrt{ad}$

㉢ 함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 존재한다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad = bc$

㉠ $(a+b)(c+d) = ad + bc + ac + bd$

$\ge 2ad + 2\sqrt{ac \cdot bd} = 4ad$ $(\because ad = bc)$ $\therefore$ 참

㉡ $a+b+c+d = (a+c)+(b+d)$

$\ge 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$

$\ge 2\sqrt{(ad+bc)+(ab+cd)}$

$\ge 2\sqrt{2ad + 2\sqrt{ab \cdot cd}} = 2\sqrt{2ad+2ad}$

$= 4\sqrt{ad}$ $\therefore$ 참

㉢ 수열 $a,\ b,\ c,\ d$의 공비를 r이라 하면

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+ar}{cx+cr} = \dfrac{a(x+r)}{c(x+r)} = \dfrac{a}{c}$

따라서, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

33. 두 양수 x, y에 대하여 $\log(x+y)$, $\log xy$의 정수 부분이 각각 10, 5일 때, $a < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < b$를 만족하는 a의 최댓값을 A, b의 최솟값을 B라 한다. 이때, $\log A + \log B$의 값은?

① 0　② 1　③ 5　④ 10　⑤ 50

해설

$\log(x+y)$, $\log xy$의 정수 부분이 각각 10, 5이므로

$10 \le \log(x+y) < 11 \cdots$ ㉠

$5 \le \log xy < 6 \cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$10-6 < \log(x+y) - \log xy < 11-5$

$4 < \log\left(\frac{x+y}{xy}\right) < 6$

$4 < \log\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) < 6$

$10^4 < \frac{1}{x}+\frac{1}{y} < 10^6$

따라서 a의 최댓값은 10^4, b의 최솟값은 10^6이므로

$\log A + \log B = \log 10^4 + \log 10^6 = 4+6 = 10$