

1. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\{0\} \subset \{0, 1\}$

㉡ $\emptyset \in \{\emptyset\}$

㉢ $1 \in \{1, 2\}$

㉤ $\emptyset \subset \{\emptyset, 0\}$

㉦ $\{a\} \subset \{a, b\}$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉦ 모두 옳다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 원소를 모두 더하면?

① 4

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 15

해설

$$X \subset A, A - X = \{1, 4\} \Rightarrow X = \{2, 3, 5\}$$

$$\therefore 2 + 3 + 5 = 10$$

3. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^{(1을 제외한 원소의 개수)} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$$

4. 3 학년 3 반 33 명의 학생 중에서 컴퓨터를 가지고 있는 학생이 25 명, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생이 10 명, 컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명이다. 컴퓨터와 홈페이지를 모두 가지고 있는 학생 수는?

① 3명

② 5명

③ 7명

④ 9명

⑤ 11명

해설

컴퓨터를 가지고 있는 학생을 집합 A 라 하고, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생을 집합 B 라 하자.

컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명
이므로 합집합의 원소의 개수는 $33 - 3 = 30$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = 25 + 10 - x$$

$$x = 5$$

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A - B = \{1, 5\}$, $A \cap B = \{3, 7\}$, $(A \cup B)^c = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $n(U) = 9$

② 전체집합을 조건제시법으로 나타내면
 $U = \{x | x \text{는 } 9\text{미만의 자연수}\}$ 이다.

③ $B - A = \{9\}$

④ $n(A^c \cap B^c) = 4$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 5, 9\}$

해설

$(A \cup B) \cup (A \cup B)^c = U$ 이므로

전체집합을 조건제시법으로 나타내면

$U = \{x | x \text{는 } 9\text{이하의 자연수}\}$ 또는

$U = \{x | x \text{는 } 10\text{미만의 자연수}\}$ 이다.

6. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은?

- ① $p : x = -1, q : |x| = 1$
 ② $p : \triangle ABC$ 에서 $\overline{BA} = \overline{BC}, q : \triangle ABC$ 는 이등변삼각형
 ③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, a, b 는 실수), $q : a = b = 0$
 ④ $p : x + y \geq 2, xy \geq 1, q : x \geq 1, y \geq 1$
 ⑤ $p : A \cap B = A, q : A \subset B$

해설

- ① 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{-1\}, Q = \{-1, 1\}$ 이므로 $P \subset Q, Q \not\subset P$
 따라서, $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로
 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ② $\overline{BA} = \overline{BC}$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.
 $\therefore p \Rightarrow q$
 그런데 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 것은 아니다.
 $\therefore q \not\Rightarrow p$
- ③ a, b 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ $x + y \geq 2, xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1, y \geq 1$ 인 것은 아니다.
 $\therefore p \not\Rightarrow q$
- ⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

7. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned}
 & [(가)] - [(나)] \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\
 &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} [(다)] \\
 &\text{따라서, } [(가)] \geq [(나)] \\
 &\text{한편, 등호는 } [(라)] \text{ 일 때 성립한다.}
 \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$
- ② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$
- ③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\
 &\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

8. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 함수 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은 얼마인가?

① a

② b

③ c

④ b, c

⑤ a, b, c

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이므로

$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$ 이어야 한다.

(i) $f(2) = b$ 인 경우 $f(1) = a$ 이므로 $f(3) = c$

(ii) $f(2) = c$ 인 경우 $g(c) = 6$ 이므로

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$$

그런데 문제의 조건에서

$(g \circ f)(2) = 4$ 이므로 모순이다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$ 이다.

해설

f 와 g 가 일대일대응이면

$g \circ f$ 도 일대일대응이다.

$(g \circ f)(2) = 4$ 에서

$g(f(2)) = 4$ 이므로 $f(2) \neq c$

또, $f(1) = a$ 이고 f 가 일대일대응이므로

$f(2) = b$ 이어야 한다.

$\therefore f(3) = c$

9. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b$, a , $a+b$ 라 하면 세 수의 합이 12이므로

$$(a-b) + a + (a+b) = 12, 3a = 12$$

$$\therefore a = 4$$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 28, 16 - d^2 = 7$$

$$d^2 = 9 \therefore d = \pm 3$$

따라서 구하는 세 수는 1, 4, 7이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

10. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$ 으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$ 의 음수인 항의 합은?

① -75

② -76

③ -77

④ -78

⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= (2n^2 - 25n) - \{2(n-1)^2 - 25(n-1)\} \\&= 4n - 27\end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 \text{ 이므로 } a_1 = -23$$

(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27$ ($n \geq 1$)

$$\text{한편, } a_n = 4n - 27 < 0 \text{ 에서 } n < \frac{27}{4} = 6.75$$

따라서 첫째항부터 제 6 항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2} \{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\} = -78$$

11. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{㉠}$$

따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면
 $\textcircled{㉠}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로

$$3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$$

12. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.
- ② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.
- ③ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개다.
- ④ n 이 짝수일 때, 16의 n 제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.
- ⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

해설

$x^n = a$ 인 실수 x 의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 실수 x 는 $\sqrt[n]{a}$ 로 1개 이다.

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x 는 $\pm \sqrt[n]{a}$ 로 2개 이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x 는 0이므로 1개 이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x 는 존재하지 않는다.

- ① $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개
- ② $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개
- ③ n 이 홀수이므로 실수인 n 제곱근은 1개
- ④ n 이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 2개
- ⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 존재하지 않는다.

13. $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② 3

③ 5

④ $2\sqrt{5}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$$x + x^{-1} = 3 \text{ 이므로}$$

$$(x + x^{-1})^3 = 27$$

$$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$$

$$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

$$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5} \quad (\because x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$$

14. 서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 $\log_a b = \sin x$, $\log_a c = \cos x$ 일 때,
 $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$ 의 값은?

① a

② b

③ c

④ ab

⑤ ac

해설

$$\log_a b = \sin x \text{에서 } b = a^{\sin x}$$

$$\log_a c = \cos x \text{에서 } c = a^{\cos x}$$

$$\begin{aligned}\therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a\end{aligned}$$

15. 집합 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2a\}$, $B = \{x \mid 1-a \leq x < 8\}$ 에 대하여 $A \cap B = A$ 일 때, 정수 a 의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

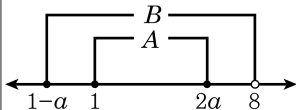
해설

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$$

$$\therefore 1 - a \leq 1 \text{ 그리고 } 2a < 8$$

$$\Rightarrow 0 \leq a < 4, a = 0, 1, 2, 3$$

따라서 정수 a 의 개수는 4개이다.



16. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20\text{이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B = \{7, 11\}$

② $A \cap B^c = \{2\}$

③ $A^c \cap B = \{3, 17\}$

④ $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

$$A = \{2, 7, 11\}, B = \{3, 7, 11, 17\}$$

$$\textcircled{2} \quad A \cap B^c = A - B = \{2\}$$

$$\textcircled{3} \quad A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$$

$$\textcircled{4} \quad A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$$

$$\textcircled{5} \quad A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$$

17. 다음은 명제 ‘ xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다.
(가)~(마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘ x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.’이다. 이것이 참임을 보이자.

x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1, y = 3n \pm 1$
(단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{이때, (다)} &= (3m \pm 1)(3n \pm 1) \\ &= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1 \\ &= 3(3mn \pm m \pm n) + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{또는 (다)} &= (3m \pm 1)(3n \mp 1) \\ &= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1 \\ &= 3(3mn \mp m \pm n) - 1\end{aligned}$$

이다. 그리고 m, n 이 정수이므로

$3mn \pm m \pm n, 3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.

따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.

그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

- ① (가) 3의 배수 ② (나) 3의 배수 ③ (다) xy
④ (라) 참 ⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

18. 제공의 합이 일정한 두 실수 a , b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36

② -20

③ -4

④ 20

⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① 에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

20. 첫째항이 31, 공차가 -2인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220인 모든 n 의 값의 합은?

① 10

② 22

③ 32

④ 44

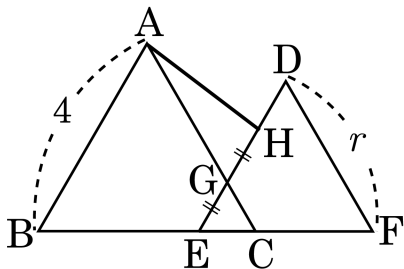
⑤ 56

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2) \}}{2} \\ &= n \{ 31 - (n-1) \} \\ &= n(32 - n) \\ &= -n^2 + 32n = 220 \end{aligned}$$

$\therefore n$ 의 값의 합은 32

21. 아래쪽 그림과 같이 한변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 r 인 정삼각형 DEF를 점 E가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{EG} = \overline{GH}$ 가 되도록 점 H를 $\overline{DG}$ 위에 잡는다. $\triangle GEC, \triangle AGH, \triangle DEF$ 의 각각의 넓이가 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이룰 때, r 의 값은?



① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{2}{7}$

해설

$\overline{EC} = a$ 라 하면 정삼각형 GEC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\angle AGH = \angle EGC = 60^\circ$ 이므로 $\triangle AGH$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}a(4-a)\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a(4-a)$$

정삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

$\triangle GEC, \triangle AGH, \triangle DEF$ 의 넓이가 공비가 r 인 등비수열을 이루므로

$$\triangle AGH = r \times \triangle GEC \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{4}a(4-a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2r$$

$$4-a = ar \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\triangle DEF = r \times \triangle AGH \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}ar(4-a)$$

$$r = a(4-a) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, r = 3$

22. $A = \sqrt[3]{9}$, $B = \sqrt{27}$, $C = \sqrt[4]{81}$ 일 때, A, B, C 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?



① $A < C < B$

② $C < A < B$

③ $B < A < C$

④ $B < C < A$

⑤ $A < B < C$

해설

$$\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[4]{81} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$$

$$\therefore A < C < B$$

23. 어떤 휴대용 계산기에서 근호 ($\sqrt{\quad}$)가 표시된 키(key)를 누르면, 계산기는 화면에 나타난 수의 양의 제곱근의 근삿값을 화면에 나타낸다. 또, x^{-1} 가 표시된 키(key)를 누르면, 화면에 나타난 수의 역수를 화면에 나타낸다. 화면에 3이 나타나 있을 때, 근호($\sqrt{\quad}$)키와 x^{-1} 키를 번갈아가면서 세 번씩 누를 때, 화면에 나타난 수는 어떤 수의 근삿값인가?

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

④ $\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$

해설

$$(\sqrt{3})^{-1} = 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{ (3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{8}}$$

24. $a = \sqrt[3]{8 + 4\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{8 - 4\sqrt{2}}$ 이고 $\log_3(a^3 + b^3)$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{9}{16}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$a^3 + b^3 = (8 + 4\sqrt{2}) + (8 - 4\sqrt{2}) = 16$$

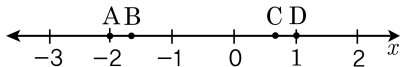
$$\log_3(a^3 + b^3) = \log_3 16$$

그런데, $\log_3 16$ 의 정수부분이 2 이므로

$$\alpha = \log_3 16 - 2 = \log_3 \frac{16}{9}$$

$$\therefore 3^\alpha = \frac{16}{9}$$

25. 다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 $A(-2)$, $B(\log a)$, $C(\log b)$, $D(1)$ 이 있다.



$-2 < \log a < -1$, $0 < \log b < 1$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a + b = 1$

② $\frac{b}{a} = \frac{1}{10}$

③ $\frac{b}{a} = 10$

④ $ab = \frac{1}{10}$

⑤ $ab = 10$

해설

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ 이므로 } \log a + 2 = 1 - \log b$$

$$\log a + \log b = \log ab = -1$$

$$ab = \frac{1}{10}$$

26. 양수 A 에 대하여 $A = n + a$ (n 은 정수, $\frac{2}{3} < a < 1$) 일 때, $\left[\log \frac{1}{A^3} \right]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-3n - 3$

② $-3n - 2$

③ $-3n - 1$

④ $-3n$

⑤ $-3n + 1$

해설

$$\log \frac{1}{A^3} = \log A^{-3} = -3 \log A$$

$$= -3(n + a) = -3n - 3a$$

$$\text{이때, } \frac{2}{3} < a < 1 \text{ 이므로 } -3 < -3a < -2$$

$$\therefore \left[\log \frac{1}{A^3} \right] = -3n - 3$$

27. 집합 X, Y 에 대하여 $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 라 하자. 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 90, n(A \Delta B) = 40, n(B \Delta C) = 36, n(C \Delta A) = 58$ 일 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하면?

① 15

② 17

③ 21

④ 23

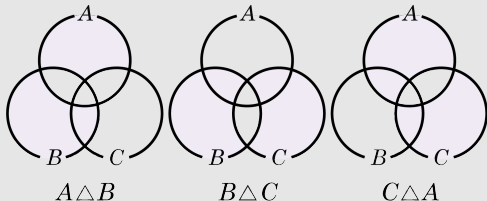
⑤ 25

해설

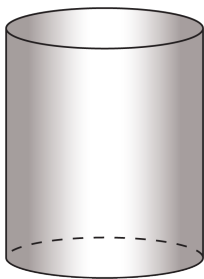
다음 벤 다이어그램에서 $n(A \Delta B) + n(B \Delta C) + n(C \Delta A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\}$

$$\therefore 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\}$$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 23$$



28. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,

부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \dots \dots \textcircled{7}$

철판의 넓이를 S 라 하면

$$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$$

$$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$$

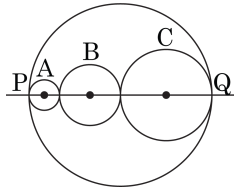
$$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$$

단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,

곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

29. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$

② $6\sqrt{35}$

③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$

⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
구의 겹넓이는

$$S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$$

$$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$

30. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x) + f(1-x) = x^2 + 2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101

② -100

③ 0

④ 100

⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면

$$x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$$

$$ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 1, b = 1$$

이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$

31. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 두 함수 f, g 가 일대일 대응이고 $f(2) = 1, g(3) = 3, (f \circ g)(1) = 2$ 일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(3) = 3$ 이고 함수 g 는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$ 이다.

만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.

그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.

따라서 $g(1) = 1$ 이다.

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고

$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$f(1) = 2, f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.

$g(1) = 1, g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5\end{aligned}$$

32. 네 양수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(a+b)(c+d) \geq 4ad$

㉡ $a+b+c+d \geq 4\sqrt{ad}$

㉢ 함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수는 존재한다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

네 양수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad = bc$

㉠ $(a+b)(c+d) = ad + bc + ac + bd$
 $\geq 2ad + 2\sqrt{ac \cdot bd} = 4ad \quad (\because ad = bc) \therefore \text{참}$

㉡ $a+b+c+d = (a+c) + (b+d)$
 $\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$
 $\geq 2\sqrt{(ad+bc) + (ab+cd)}$
 $\geq 2\sqrt{2ad + 2\sqrt{ab \cdot cd}} = 2\sqrt{2ad + 2ad}$
 $= 4\sqrt{ad} \therefore \text{참}$

㉢ 수열 a, b, c, d 의 공비를 r 이라 하면

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+ar}{cx+cr} = \frac{a(x+r)}{c(x+r)} = \frac{a}{c}$$

따라서, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다.

$\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

33. 두 양수 x, y 에 대하여 $\log(x+y), \log xy$ 의 정수 부분이 각각 10, 5일 때, $a < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < b$ 를 만족하는 a 의 최댓값을 A , b 의 최솟값을 B 라 한다. 이때, $\log A + \log B$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 5

④ 10

⑤ 50

해설

$\log(x+y), \log xy$ 의 정수 부분이 각각 10, 5이므로

$$10 \leq \log(x+y) < 11 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$5 \leq \log xy < 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$10 - 6 < \log(x+y) - \log xy < 11 - 5$$

$$4 < \log \left(\frac{x+y}{xy} \right) < 6$$

$$4 < \log \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) < 6$$

$$10^4 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 10^6$$

따라서 a 의 최댓값은 10^4 , b 의 최솟값은 10^6 이므로

$$\log A + \log B = \log 10^4 + \log 10^6 = 4 + 6 = 10$$