1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$　② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$　④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$

⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$ 의 꼴이어야 한다.

2. 공집합이 아닌 두집합 $X,\ Y$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3,\quad g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0,\ (x-4)(x+2) = 0$
$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

3. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

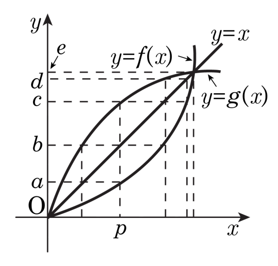
$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여
함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고
$f(1) = 4$ 이므로 $\left\{f(2), f(3), f(4)\right\} = \{1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

4. 두 함수 $f(x)=4x-3,\ g(x)=2x+1$ 에 대하여 $h\circ g=f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=x+4$ ② $h(x)=2x-5$ ③ $h(x)=3x+2$
④ $h(x)=3x+5$ ⑤ $h(x)=5x+3$

해설
$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면
$h\circ g=f$ 에서 $a(2x+1)+b=4x-3$
$\therefore\ 2a=4,\ a+b=-3$
이것을 풀면 $a=2,\ b=-5$
따라서 $h(x)=2x-5$

5. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

6. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ $f(3) = 4$

㉡ $0 \le f(n) \le 4$

㉢ $f(n) = 2$인 자연수 n은 없다.

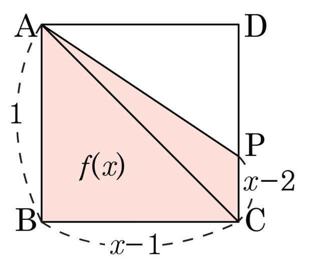
① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

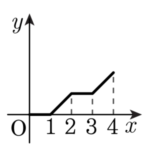
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

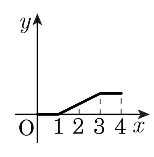
해설

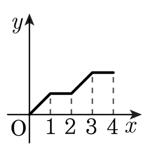
㉠. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한
일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$에서
$f(3) = 4 \quad \therefore$ 참
㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는
$0, 1, 2, 3, 4$만이 올 수 있으므로
$0 \le f(n) \le 4 \quad \therefore$ 참
㉢. $f(n) = 2$ 이므로
$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$
$(p_i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.
즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.
그런데 정수 l에 대하여
ⅰ) $n = 5l$이면 $n^2 = 25l^2$
즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ⅱ) $n = 5l + 1$이면 $n^2 = (5l+1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
ⅲ) $n = 5l + 2$이면 $n^2 = (5l+2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅳ) $n = 5l + 3$이면 $n^2 = (5l+3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅴ) $n = 5l + 4$이면 $n^2 = (5l+4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n은 ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ), ⅴ)중
어느 한 꼴로 표현이 가능하므로
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
$\therefore$ 참

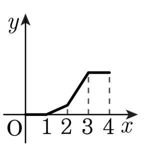
7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

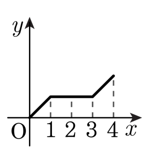


①


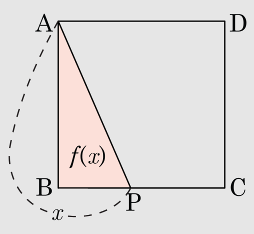
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

8. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U,\ X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$
$X \cup Y = \varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X) = n(Y)$
$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ X \cup Y = \varnothing$ 이므로
$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.
$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$
$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

9. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times 4\times 1=4$ (개)

10. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f,\ g$가 $f(x) = ax + b,\ g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

12. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \le 2\text{일 때}) \\ 0 & (x > 2\text{일 때}) \end{cases}$ 라 정의하자. 이 때, $f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

1) $f(1) = 2$, $f^2(1) = 3$, $f^3(1) = 0$, $f^4(1) = 1 \cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$

$\therefore\ f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$

2) $f(3) = 0$, $f^2(3) = 1$, $f^3(3) = 2$, $f^4(3) = 3$, $f^5(3) = 0 \cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501} = 3$

$\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$

$\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$

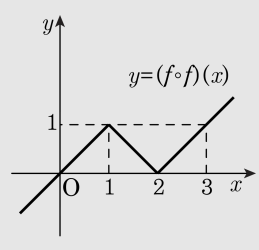
13. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x - 1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x - 1| - 1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.



그런데, $b \neq 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$

14. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

15. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \to \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(i) $i \ne j$ 일 때 $f(i) \ne f(j)$, (ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \ne f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \to a^2 - 5a + 4 = 0$

$\to (a-1)(a-4) = 0$

$\therefore a = 1,\ 4$

$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \to b^2 - 5b + 4 = 0$

$\to (b-1)(b-4) = 0$

$\therefore b = 1,\ 4$

$\therefore a = 1,\ b = 4\ (\because\ 0 < a < b)$

$\therefore\ a + b = 5$

16. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 두 함수 $f,\ g$가 일대일 대응이고 $f(2)=1$, $g(3)=3$, $(f\circ g)(1)=2$일 때, $(g\circ f)(1)+(g\circ f)(3)$의 값은?

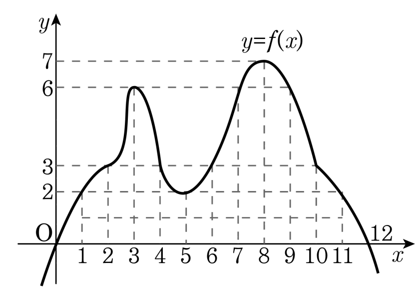
① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$g(3)=3$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(1)=1$ 또는 $g(1)=2$이다.
만약 $g(1)=2$ 라고 가정하면
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=2$ 이다.
그러나 문제의 조건에서 $f(2)=1$ 이므로 모순이다.
따라서 $g(1)=1$ 이다.
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)$ 이고
$(f\circ g)(1)=2$ 이므로 $f(1)=2$ 이다.
$f(1)=2$, $f(2)=1$ 이므로 $f(3)=3$ 이다.
$g(1)=1$, $g(3)=3$ 이므로 $g(2)=2$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(1)+(g\circ f)(3) &= g(f(1))+g(f(3))\\ &= g(2)+g(3)\\ &= 2+3=5\end{aligned}$$

17. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,
$f(f(x+2)) = 6$
$x + 2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
$\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
그런데 $f(t) \le 7$ 이므로
$f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
(i) $f(t) = 3$ 일 때,
$t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
$\therefore x = 6$
(i) , (ii) 에서
실수 x 의 값은 0 , 2 , 4 , 6 , 8 의 5 개이다.

18. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

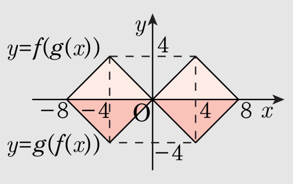
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8\times 8=64$