

1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

2. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

3. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고

$f(1) = 4$ 이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

4. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x + 4$

② $h(x) = 2x - 5$

③ $h(x) = 3x + 2$

④ $h(x) = 3x + 5$

⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면

$h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$

$\therefore 2a = 4, a + b = -3$

이것을 풀면 $a = 2, b = -5$

따라서 $h(x) = 2x - 5$

5. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

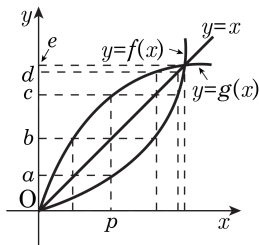
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

6. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ $f(3) = 4$
 ㉡ $0 \leq f(n) \leq 4$
 ㉢ $f(n) = 2$ 인 자연수 n 은 없다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f(3)$ 은 3^2 을 오진법으로 표시한 일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서 $f(3) = 4 \quad \therefore$ 참

㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4만이 올 수 있으므로 $0 \leq f(n) \leq 4 \quad \therefore$ 참

㉢. $f(n) = 2$ 이므로

$$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$$

($p_i = 0, 1, 2, 3, 4$)의 꼴로 나타낼 수 있다.

즉, n^2 을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.

그런데 정수 l 에 대하여

i) $n = 5l$ 이면 $n^2 = 25l^2$

즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.

ii) $n = 5l + 1$ 이면 $n^2 = (5l + 1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

iii) $n = 5l + 2$ 이면 $n^2 = (5l + 2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

iv) $n = 5l + 3$ 이면 $n^2 = (5l + 3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

v) $n = 5l + 4$ 이면 $n^2 = (5l + 4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

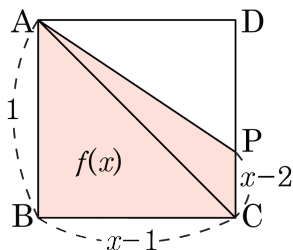
모든 자연수 n 은 i), ii), iii), iv), v) 중

어느 한 꼴로 표현이 가능하므로

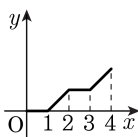
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.

$\therefore$ 참

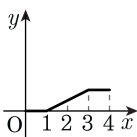
7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



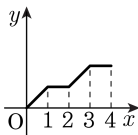
①



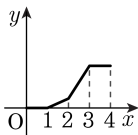
②



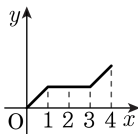
③



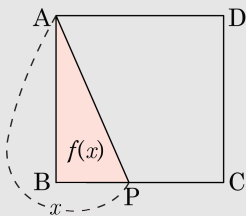
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

8. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X, Y \subset U$, $X \cup Y = U$,
 $X \cap Y = \emptyset$ 이다.

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$

$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, \quad X \cap Y = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며

X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

9. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

10. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{\frac{x}{x-1} - 1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$$\therefore x^3 = x, x^3 - x = 0, x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1 \text{ or } 0$

$$\therefore -1 + 0 = -1$$

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60

② 55

③ 51

④ 48

⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉠}} = \textcircled{\text{㉡}}$ 이므로

$$2a = 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

12. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2 \text{일 때}) \\ 0 & (x > 2 \text{일 때}) \end{cases} \text{라 정의하자. 이 때, } f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$1) f(1) = 2, f^2(1) = 3, f^3(1) = 0, f^4(1) = 1 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$$

$$2) f(3) = 0, f^2(3) = 1, f^3(3) = 2, f^4(3) = 3, f^5(3) = 0 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501}(3) = 3$$

$$\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$$

13. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

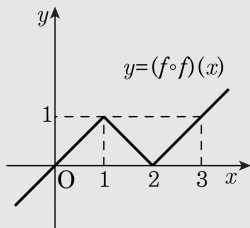
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로 $ab = -2$



14. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$

② $2f(7)$

③ $f(7)$

④ $f(8)$

⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1) + f(n)$ 을 이용하여 $f(4) + f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7)$, $f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로
 $2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

15. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

$$(i) \ i \neq j \text{ 일 때 } f(i) \neq f(j),$$

$$(ii) \ f(A) = A$$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i), 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\rightarrow (a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 1, 4$$

$$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b-1)(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4 (\because 0 < a < b)$$

$$\therefore a + b = 5$$

16. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 두 함수 f, g 가 일대일 대응이고 $f(2) = 1, g(3) = 3, (f \circ g)(1) = 2$ 일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(3) = 3$ 이고 함수 g 는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$ 이다.

만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.

그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.

따라서 $g(1) = 1$ 이다.

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고

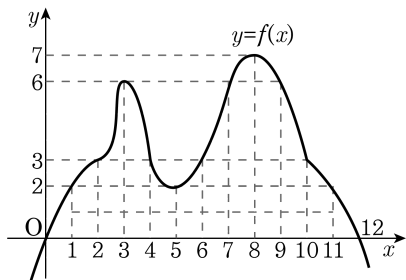
$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$f(1) = 2, f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.

$g(1) = 1, g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5\end{aligned}$$

17. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,

$$f(f(x+2)) = 6$$

$x+2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$

$$\therefore f(t) = 3 \text{ 또는 } f(t) = 7 \text{ 또는 } f(t) = 9$$

그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로

$$f(t) = 3 \text{ 또는 } f(t) = 7$$

(i) $f(t) = 3$ 일 때,

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4 \text{ 또는 } t = 6 \text{ 또는 } t = 10$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$

$$\therefore x = 6$$

(i), (ii) 에서

실수 x 의 값은 0, 2, 4, 6, 8 의 5 개이다.

18. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36

② 64

③ 72

④ 54

⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$

$x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$

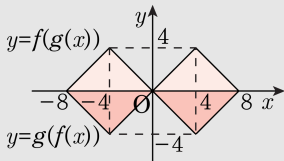
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$

$x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore 8 \times 8 = 64$