1. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \rightarrow R$ 가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$　　② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$　　④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$ 이면 증가하고 $a < 0$ 이면 감소하는 그래프이다.

2. 두 집합 $X = \{-1,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로
$f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.
$-a - b = -3$, $a - b = 1$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$
$\therefore\ a + b = 3$

3. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

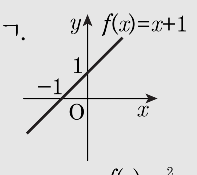
<보기>

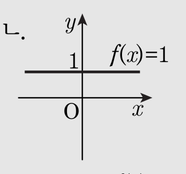
㉠ $f(x) = x+1$	㉡ $f(x) = 1$
㉢ $f(x) = x^3$	㉣ $f(x) =\| x+1 \|$

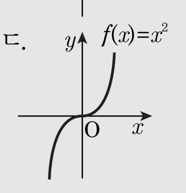
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

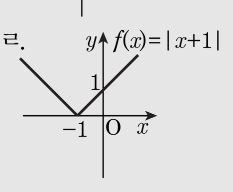
해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

5. $f(x) = -2x+3,\ g(x) = 4x+1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$h(x) = ax+b$ 라고 놓고

$(g \circ h)(x) = 4(ax+b)+1 = 4ax+4b+1$

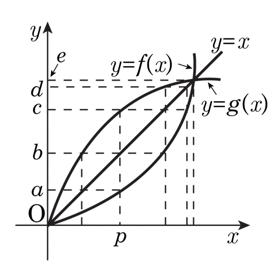
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax+4b+1)+3 \\ &= -8ax-8b-2+3 \\ &= 4x+1\end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$

$h(x) = -\frac{1}{2}x$

$h(2) = -1$

6. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a　　② b　　③ c

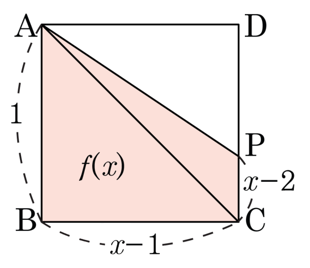
④ d　　⑤ e

해설

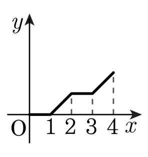
주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

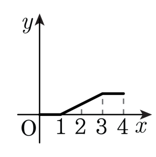
7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



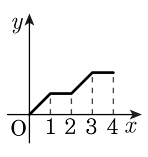
①



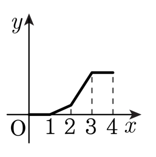
②



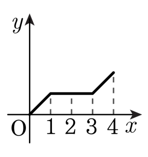
③



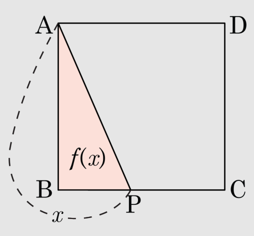
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

8. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X\cup Y=U,\ X\cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y\subset U,\ X\cup Y=U,$
$X\cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X\cup Y)=n(U)=4,\ X\cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2\times 6=12$

9. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,
$\{3, 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2 = 6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

10. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$ ㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠   ② ㉡   ③ ㉢   ④ ㉠, ㉢   ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
$= f((x+1)+1) = f(x+2)$
$= (x+2)+1 = x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
$= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

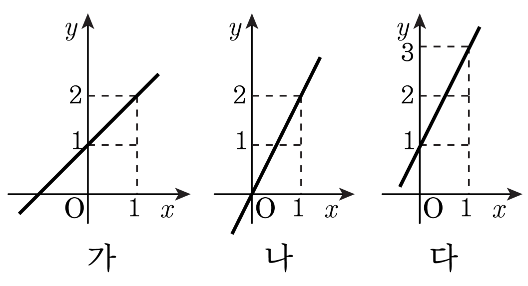
11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f,\ g$가 $f(x)=ax+b,\ g(x)=2x^2+3x+1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은?(단, $a\neq 0$)

① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(2x^2+3x+1)+b$
$=2ax^2+3ax+a+b\cdots\cdots$ ㉠
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2(ax+b)^2+3(ax+b)+1$
$=2a^2x^2+(4ab+3a)x+2b^2+3b+1\cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ $=$ ㉡이므로
$2a=2a^2,\ 3a=4ab+3a,\ a+b=2b^2+3b+1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=0(\because a\neq 0)$
즉, $f(x)=x$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=1+2+3+\cdots+10=55$

12. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



가 나 다

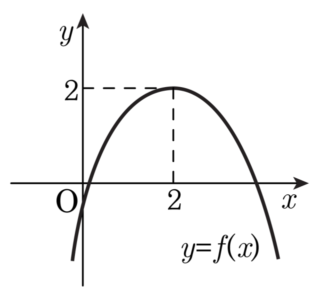
다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면
$f(x) = x + 1, \ g(x) = 2x, \ w(x) = 2x + 1$ 이다.
$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로
$\therefore \ w = f \circ g$

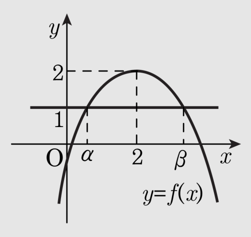
13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

14. 함수 $f(x)$가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1　② 4　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y) = 2x^2$, $f(x)=f(-x)$ 일 때

ⅰ) $x=1,\ y=0$ 을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times1$ ($\because\ f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times1=2\times1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ⅱ) $x=1,\ y=1$ 을 대입

$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times1$

$f(2)+f(0)-2\times2=2$

$f(2)+1-4=2 \ \rightarrow\ f(2)=5$

$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=2\times5=10$

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

식 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=1$, $y=1$ 을 대입하면
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$
$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3f(1)$
$f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)=4f(1)$ 이다.

$\vdots$

$f(n-1)=(n-1)f(1)$ 이라 놓으면
$f(n)=f((n-1)+1)=f(n-1)+f(1)=nf(1)$
따라서 $f(30)=30f(1)=30\cdot 2=60$ 이다.

16. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \to \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(i) $i \ne j$ 일 때 $f(i) \ne f(j)$,   (ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \ne f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \to a^2 - 5a + 4 = 0$

$\to (a-1)(a-4) = 0$

$\therefore a = 1,\ 4$

$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \to b^2 - 5b + 4 = 0$

$\to (b-1)(b-4) = 0$

$\therefore b = 1,\ 4$

$\therefore a = 1,\ b = 4\ (\because\ 0 < a < b)$

$\therefore\ a + b = 5$

17. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} (x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq 0) \\ 0 \quad (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3 = t$ 로 놓으면

$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$

$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0\text{일 때}\right) \\ 0 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0\text{일 때}\right) \end{cases}$

즉 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 (x < -1) \end{cases}$

18. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] + \left[-\frac{1}{2}x+1\right]$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f\circ f^1, f^3 = f\circ f^2, \cdots, f^n = f\circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \cdots$ 을
차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$$f^1(3) = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}+1\right] = 1 + \left[-\frac{1}{2}\right] = 1-1=0$$

$\therefore f^1(3) = 0$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f\circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = [0]+[1] = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f^2(3) = 1$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f\circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

$\therefore f^3(3) = 0$
$f^4(3) = (f\circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$
$\therefore f^4(3) = 1$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이
짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.
$\therefore f^{2006}(3) = 1$