

1. 실수의 집합을 R 이라 할 때, 함수 $f : R \rightarrow R$ 가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$

② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$

④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.

①은 직선으로서 $a > 0$ 이면 증가하고 $a < 0$ 이면 감소하는 그래프이다.

2. 두 집합 $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로

$f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.

$$-a - b = -3, \quad a - b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$

$$\therefore a + b = 3$$

3. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = 1$

㉢ $f(x) = x^3$

㉣ $f(x) = |x + 1|$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

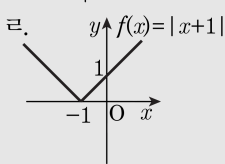
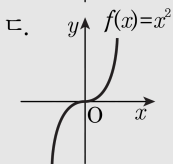
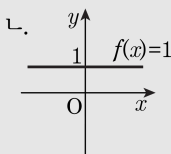
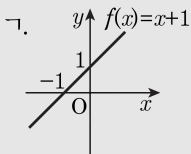
③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉣

해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.



따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$(f \circ g)(1) = 2 \text{에서}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$$

$$\therefore a + b = 2$$

5. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

6. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

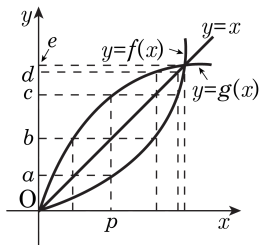
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

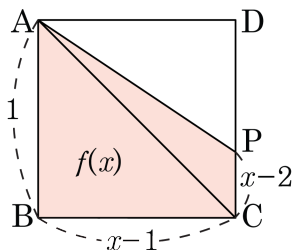


해설

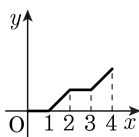
주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

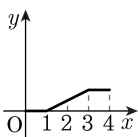
7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



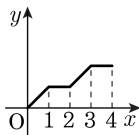
①



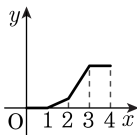
②



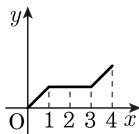
③



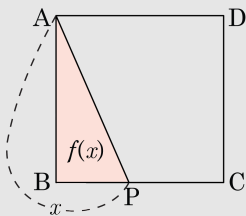
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

8. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X, Y \subset U$, $X \cup Y = U$,
 $X \cap Y = \emptyset$ 이다.

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$

$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, \quad X \cap Y = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며

X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

9. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8 - 2 = 6$ 따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

10. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60

② 55

③ 51

④ 48

⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉠}} = \textcircled{\text{㉡}}$ 이므로

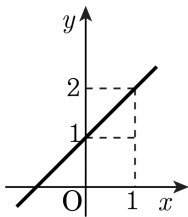
$$2a = 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

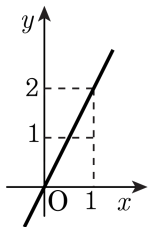
즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

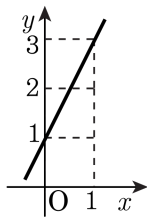
12. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



가



나



다

다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

- ① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

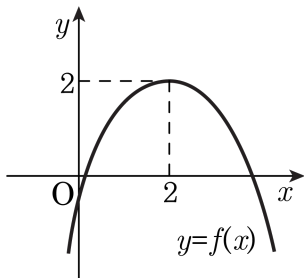
그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $w(x) = 2x + 1$ 이다.

$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로

$\therefore w = f \circ g$

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

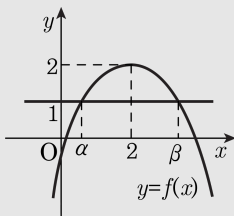
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

14. 함수 $f(x)$ 가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y) + f(y-x) - 2f(y) = 2x^2$, $f(x) = f(-x)$ 를 만족시킬 때, $f(1) \cdot f(2)$ 의 값은? (단, $f(0) = 1$)

① 1

② 4

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y) + f(y-x) - 2f(y) = 2x^2$,
 $f(x) = f(-x)$ 일 때

i) $x = 1, y = 0$ 을 대입

$$f(1+0) + f(0-1) - 2f(0) = 2 \times 1 \quad (\because f(0) = 1)$$

$$f(1) + f(-1) - 2 \times 1 = 2 \times 1$$

$$2f(1) = 4 \quad (\because f(1) = f(-1)) \rightarrow f(1) = 2$$

ii) $x = 1, y = 1$ 을 대입

$$f(1+1) + f(1-1) - 2f(1) = 2 \times 1$$

$$f(2) + f(0) - 2 \times 2 = 2$$

$$f(2) + 1 - 4 = 2 \rightarrow f(2) = 5$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) = 2 \times 5 = 10$$

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

식 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$$

$$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 4f(1) \text{ 이다.}$$

$\vdots$

$f(n-1) = (n-1)f(1)$ 이라 놓으면

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1) + f(1) = nf(1)$$

따라서 $f(30) = 30f(1) = 30 \cdot 2 = 60$ 이다.

16. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

$$(i) \ i \neq j \text{ 일 때 } f(i) \neq f(j),$$

$$(ii) \ f(A) = A$$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i), 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\rightarrow (a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 1, 4$$

$$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b-1)(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4 (\because 0 < a < b)$$

$$\therefore a + b = 5$$

17. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

$$\textcircled{1} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3=t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 일 때}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{ 일 때}\right) \end{cases}$$

$$\text{즉 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$

18. $f(x) = \left\lceil \frac{1}{2}x \right\rceil + \left\lceil -\frac{1}{2}x + 1 \right\rceil$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f \circ f^1, f^3 = f \circ f^2, \dots, f^n = f \circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \dots$ 을 차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$$f^1(3) = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + \left\lceil -\frac{3}{2} + 1 \right\rceil = 1 + \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore f^1(3) = 0$$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = [0] + [1] = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f^2(3) = 1$$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f^3(3) = 0$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$$

$$\therefore f^4(3) = 1$$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이

짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.

$$\therefore f^{2006}(3) = 1$$