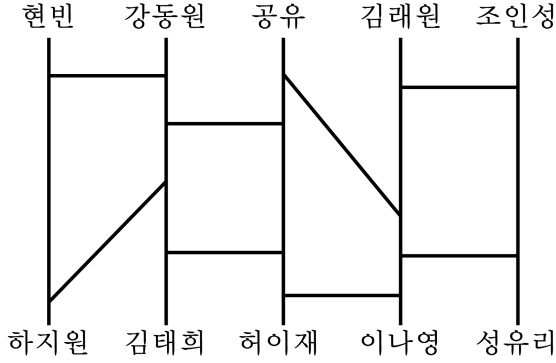


1. 남녀 혼성 장기자랑에 참여한 H 남고 남학생 5명과 S 여고 여학생 5명이 파트너를 정하려고 한다. 남녀 한 명도 빠짐없이 팀을 이루기 위한 방법으로 사다리타기로 파트너를 정하기로 하였다. 현빈과 김태희가, 강동원과 이나영이, 공유와 성유리가, 김래원과 허이재가 짝을 이루었다면 남은 조인성의 파트너는 누구인가?



- ① 하지원 ② 성유리 ③ 이나영
- ④ 허이재 ⑤ 김태희

해설

일대일 대응이므로 조인성-하지원이 파트너가 된다.

2. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

3. $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2x+1}{x}$

② $\frac{2x-1}{x}$

③ $\frac{x-1}{x}$

④ $\frac{x+1}{x}$

⑤ $\frac{1}{x}$

해설

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} &= 1 + \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} \\ &= 1 - \frac{1-x}{x} = \frac{x-1+x}{x} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$

4. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = a \neq 0 \text{ 라 하면}$$

$$x = 2a, y = 3a$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2} &= \frac{4a^2 - 48a^2 + 9a^2}{4a^2 - 9a^2} \\ &= \frac{-35a^2}{-5a^2} = 7 \end{aligned}$$

5. 함수 $y = \frac{x+a}{bx+c}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3, y 축 방향으로 1 만큼
평행이동시켰더니 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 일치하였다. 이 때, abc 의 값을
구하면?

① 8 ② 6 ③ 1 ④ -6 ⑤ -8

해설

$y = \frac{x+a}{(bx+c)}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3,
 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 것은 반대로
 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼,
 y 축의 방향으로 -1 만큼 이동시킨것과 같다.
 $y = \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{-x-2}{x+3} = \frac{x+2}{-x-3}$
따라서 $a = 2, b = -1, c = -3$ 이므로
 $\therefore abc = 6$

6. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \frac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \frac{1}{x}$

② $y = \frac{2}{x}$

③ $y = x + \frac{1}{x}$

④ $y = x + \frac{2}{x}$

⑤ $y = 2x + \frac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \frac{2}{x+1}$$

$$= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 4$$

$$\therefore y+4 = 2(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

이것은 $y = 2x + \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축

방향으로 -1 , y 축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

7. $f(t) = \frac{t}{1-t}$ (단, $t \neq 1$) 인 함수 f 가 있다. $y = f(x)$ 일 때, $x = \square$ 로 나타낼 수 있다. $\square$ 안에 알맞은 것은?

- ① $-f(y)$ ② $-f(-y)$ ③ $f(-y)$
④ $f\left(\frac{1}{y}\right)$ ⑤ $f(y)$

해설

$$y = f(x) = \frac{x}{1-x} \text{ 에서}$$

$$y - xy = x, \quad x(1+y) = y$$

$$\therefore x = \frac{y}{1+y} = \frac{-y}{1-(-y)} = -f(-y)$$

8. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \sqrt{2(x-a)} + 1 + 2 + b$
 $= \sqrt{2x-2a+1} + 2 + b$
이 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 같으므로
 $a = 2, -2a + 1 = b, 2 + b = c$
따라서, $a = 2, b = -3, c = -1$ 이므로
 $\therefore a + b + c = -2$

9. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{2}{5}$
- ③ $-\frac{1}{5}$
- ④ $-\frac{2}{5}$
- ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$
i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$
ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$
 m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

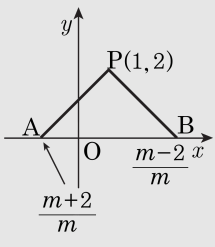
$$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$$

$$10m = -4$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

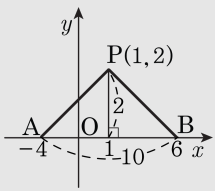
$$\overline{AB} = 10$$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



10. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

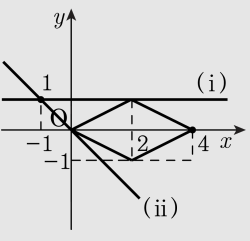
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

11. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{ 에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \text{ 이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

12. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

13. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y+x+x-y+2y=2x \end{aligned}$$

14. $\sqrt{6 + \sqrt{20}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{2a+b}{b} - ab$ 의 값은?

① $13 + 6\sqrt{5}$

② $13 - 6\sqrt{5}$

③ $13 + 3\sqrt{5}$

④ $19 - 3\sqrt{5}$

⑤ $19 + 3\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{6 + \sqrt{20}} &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(5+1) + 2\sqrt{5 \times 1}} \\ &= \sqrt{5} + 1 \\ \text{그런데 } 2 < \sqrt{5} < 3 \text{ 이므로 } 3 < \sqrt{5} + 1 < 4 \\ \therefore a = 3, b = (\sqrt{5} + 1) - 3 = \sqrt{5} - 2 \\ \frac{2a+b}{b} - ab &= \frac{2 \times 3 + \sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} - 3(\sqrt{5} - 2) \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} - 3(\sqrt{5} - 2) \\ &= (13 + 6\sqrt{5}) - 3\sqrt{5} + 6 \\ &= 19 + 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

15. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ 의 값을 구하면?

- ① 202 ② 204 ③ 206 ④ 208 ⑤ 210

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} &= (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} = x \\ \sqrt{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2} \\ &= 3-2\sqrt{2} = y \\ x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= x^2(x+y)+y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2+y^2) \\ \text{각각 } x, y \text{ 를 대입하여 계산한다.} \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 34 \times 6 = 204\end{aligned}$$

16. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{에서 } 2x = \sqrt{5} + 1$$

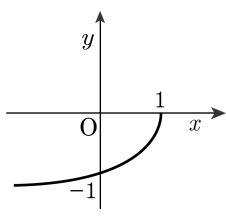
$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

17. $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

$$y = -\sqrt{ax+b} + c = -\sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

점(1, 0)에서 시작하므로 $-\frac{b}{a} = 1, c = 0$

$$\therefore b = -a, c = 0$$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점(0, -1)를 지나므로

$$-1 = -\sqrt{-a}$$

양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$$\therefore a = -1$$

따라서 $a = -1, b = 1, c = 0$ 이므로

$$a+b+c = -1+1+0 = 0$$

18. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수에 대하여 $f(x) = (x \text{를 } 3 \text{으로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

- ㉠ $f(10) = 1$
- ㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 두 자리 자연수 x 의 개수는 29개이다.
- ㉢ 임의의 자연수에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 이다.

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

해설

㉠ $10 = 3 \times 3 + 1$ 즉 나머지 1
 $\therefore f(10) = 1$
㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 자연수는 x 를 3으로 나누면 나머지가 2 이므로 $x = 3n + 2$ (n 은 음이 아닌 정수)이고 두 자리수이므로
 $10 \leq 3n + 2 \leq 99$, 즉 $8 \leq 3n \leq 97$, $\frac{8}{3} \leq n \leq \frac{97}{3}$
 $\therefore n = 3, 4, 5, 6 \dots, 32$ 이므로 30개이다.
㉢ $x = 2$ 일 때, $f(2) = 2$ 이고 $f(2^2) = f(3 \times 1 + 1) = 1$ 이므로 $f(x) \neq f(x^2)$ 이다.
따라서, 옳은 것은 ㉠뿐이다.

19. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

{3, 4}로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는

 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 지역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

20. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$

일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{99}$ ② $\frac{99}{100}$ ③ $\frac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

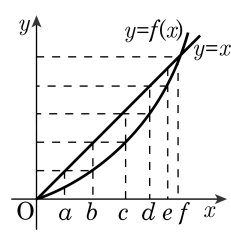
$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

$$\text{따라서 } f_{100}(x) = f_{3 \times 33 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

21. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



- ① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$
 ④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설
 $(f \circ f)(d) = b, (g \circ g)(c) = e$
 f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

22. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1} + 1$, $x = \sqrt{y+1} + 1$ 의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \text{에서}$$

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

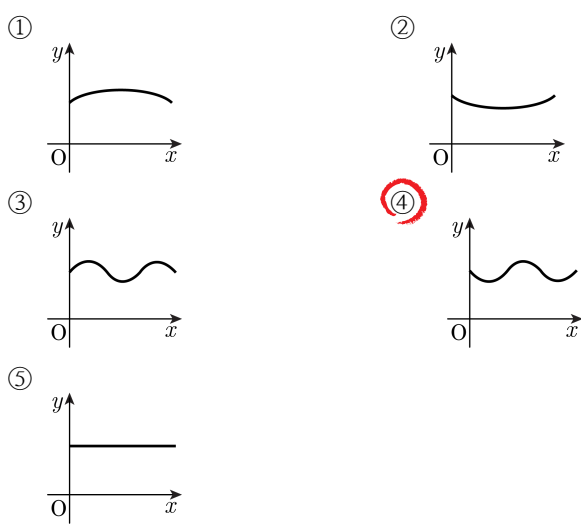
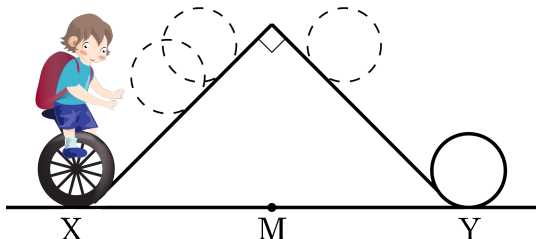
$$x = 0, 3$$

$$x \geq 1 \text{이므로 } x = 3$$

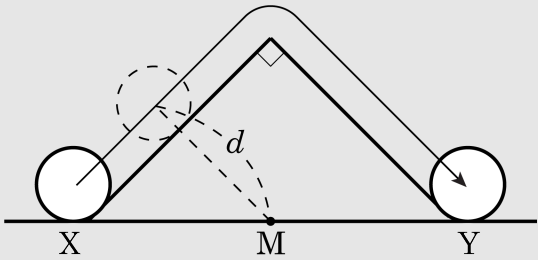
$$\therefore P(3, 3)$$

$$OP = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

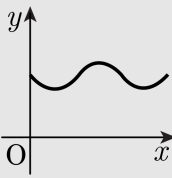
23. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y 라 하고, 선분 XY 의 중점을 M 이라 하자. 철수가 X 에서 출발하여 최단 거리로 Y 까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t 와 점 M 에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d 에 대하여 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)



해설



따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는



24. 집합 $D = \{x \mid -2a \leq x \leq a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \geq -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

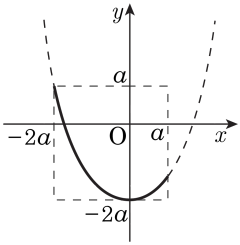
$$f(0) = b = -2a \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(-2a) &= 4a^2 + b \\ &= a \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$$



25. 두 함수 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f^{-1})(3x - 1) = 2x + 1$ 이 성립할 때, $f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

- ① -3
- ② -1
- ③ 3
- ④ 5
- ⑤ 7

해설

$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 이므로

준식은 $(f \circ g)^{-1}(3x - 1) = 2x + 1$ 이다.

$(f \circ g)(2x + 1) = 3x - 1$ 에서

$f(g(2x + 1)) = 3x - 1$, $f(2x + 3) = 3x - 1$

$2ax + 3a + b = 3x - 1$ 에서 $a = \frac{3}{2}$

$3a + b = -1$ 에서 $b = -\frac{11}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$

$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = \frac{3}{2}k - \frac{11}{2} = 2$

$\therefore k = 5$