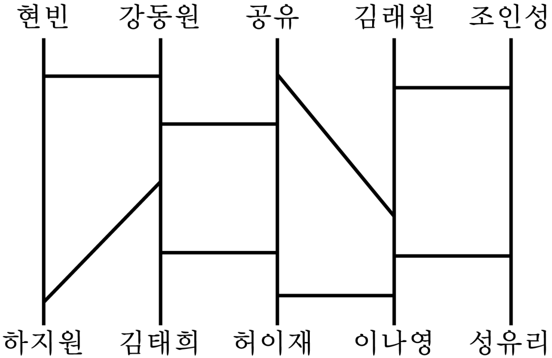
1. 남녀 혼성 장기자랑에 참여한 H 남고 남학생 5명과 S 여고 여학생 5명이 파트너를 정하려고 한다. 남녀 한 명도 빠짐없이 팀을 이루기 위한 방법으로 사다리타기로 파트너를 정하기로 하였다. 현빈과 김태희가, 강동원과 이나영이, 공유와 성유리가, 김래원과 허이재가 짝을 이루었다면 남은 조인성의 파트너는 누구인가?



① 하지원 ② 성유리 ③ 이나영
④ 허이재 ⑤ 김태희

해설

일대일 대응이므로 조인성-하지원이 파트너가 된다.

2. 다음 식을 간단히 하면 $\dfrac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$ 이므로 $a+b=15$

3. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{2x+1}{x}$ ② $\dfrac{2x-1}{x}$ ③ $\dfrac{x-1}{x}$

④ $\dfrac{x+1}{x}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$$1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}$$

$$=1-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x-1+x}{x}$$

$$=\dfrac{2x-1}{x}$$

4. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\dfrac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = a \neq 0$ 라 하면

$x = 2a,\ y = 3a$

$$\frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{4a^2 - 48a^2 + 9a^2}{4a^2 - 9a^2}$$

$$= \frac{-35a^2}{-5a^2} = 7$$

5. 함수 $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3, y축 방향으로 1만큼 평행이동시켰더니 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 일치하였다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

① 8　　② 6　　③ 1　　④ −6　　⑤ −8

해설

$y=\dfrac{x+a}{(bx+c)}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3,

y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것은 반대로

$y=\dfrac{1}{x}$ 을 x축의 방향으로 −3만큼,

y축의 방향으로 −1만큼 이동시킨것과 같다.

$$y=\frac{1}{x+3}-1=\frac{-x-2}{x+3}=\frac{x+2}{-x-3}$$

따라서 $a=2, b=-1, c=-3$ 이므로

$\therefore abc=6$

6. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \dfrac{1}{x}$　　② $y = \dfrac{2}{x}$　　③ $y = x + \dfrac{1}{x}$

④ $y = x + \dfrac{2}{x}$　　⑤ $y = 2x + \dfrac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \frac{2}{x+1}$$

$$= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 4$$

$$\therefore\ y + 4 = 2(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

이것은 $y = 2x + \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1, y축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

7. $f(t)=\dfrac{t}{1-t}$ (단, $t \neq 1$) 인 함수 f 가 있다. $y=f(x)$ 일 때, $x=\square$ 로 나타낼 수 있다. □ 안에 알맞은 것은?

① $-f(y)$　　② $-f(-y)$　　③ $f(-y)$

④ $f\left(\dfrac{1}{y}\right)$　　⑤ $f(y)$

해설

$y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 에서

$y-xy=x,\ x(1+y)=y$

$\therefore\ x=\dfrac{y}{1+y}=\dfrac{-y}{1-(-y)}=-f(-y)$

8. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x + a,\ y + b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{2(x-a)+1} + 2 + b$$
$$= \sqrt{2x-2a+1} + 2 + b$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 같으므로
$a = 2,\ \ -2a + 1 = b,\ 2 + b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a + b + c = -2$

9. 직선 $y = m\,|\,x-1\,|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

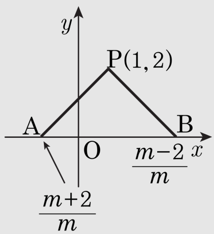
해설

$y = m\,|\,x-1\,|+2$

ⅰ) $x \ge 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ⅱ) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.



x절편은 ㉠에서 $x = \dfrac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \dfrac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는

$\dfrac{m-2}{m} - \dfrac{m+2}{m} = \dfrac{-4}{m}$

$\therefore$ $\triangle$PAB의 면적이 10이므로

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\dfrac{2}{5}$

해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

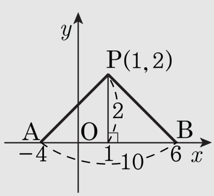
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m\,|\,x-1\,|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m\,|\,6-1\,|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\dfrac{2}{5}$

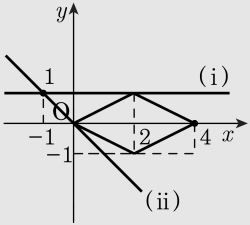


10. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

11. 등식 $\dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

$\dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}$ 에서

$a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{11}{4} = 2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$a=2$ 이고 $\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{3}{4}$

이 때, $b+\dfrac{1}{c} = \dfrac{4}{3} = 1+\dfrac{1}{3}$ 이므로 $b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14$

12. $\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{2b+c}{4}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{2a+8b-c}{x}$에서 x의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5}&=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}\\&=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}\\&=\frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$\therefore x=10$

13. $x,\ y$는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$이 성립하므로 $y < 0,\ x \geq 0$

$\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$

$= |y-x| + x - y - 2|y|$

$= -y + x + x - y + 2y = 2x$

14. $\sqrt{6+\sqrt{20}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{2a+b}{b}-ab$의 값은?

① $13+6\sqrt{5}$　② $13-6\sqrt{5}$　③ $13+3\sqrt{5}$　④ $19-3\sqrt{5}$　⑤ $19+3\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{6+\sqrt{20}} &= \sqrt{6+2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\times1}} \\ &= \sqrt{5}+1\end{aligned}$$

그런데 $2<\sqrt{5}<3$ 이므로 $3<\sqrt{5}+1<4$

$\therefore a=3,\ b=(\sqrt{5}+1)-3=\sqrt{5}-2$

$$\begin{aligned}\frac{2a+b}{b}-ab &= \frac{2\times3+\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}-3(\sqrt{5}-2) \\ &= \frac{(\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}-3(\sqrt{5}-2) \\ &= (13+6\sqrt{5})-3\sqrt{5}+6 \\ &= 19+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

15. $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 202　② 204　③ 206　④ 208　⑤ 210

해설

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2}$$

$$= 3-2\sqrt{2} = y$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y)$$

$$= (x+y)(x^2+y^2)$$

각각 x, y를 대입하여 계산한다.

$(x+y)(x^2+y^2) = 34 \times 6 = 204$

16. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

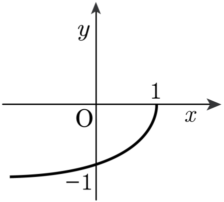
$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore \ x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore \ x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

17. $y = -\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = -\sqrt{ax+b}+c = -\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

18. 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수에 대하여 $f(x) = (x$를 3으로 나눈 나머지 $)$로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 두 자리 자연수 x의 개수는 29 개이다.

㉢ 임의의 자연수에 대하여 $f(x) = f(x^2)$이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $10 = 3 \times 3 + 1$ 즉 나머지 1

$\therefore\ f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$를 만족하는 자연수는 x를 3으로 나누면 나머지가 2 이므로 $x = 3n + 2$ (n 은 음이 아닌 정수)이고 두 자리수이므로

$10 \le 3n + 2 \le 99$, 즉 $8 \le 3n \le 97$, $\dfrac{8}{3} \le n \le \dfrac{97}{3}$

$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \cdots$, 32 이므로 30개이다.

㉢ $x = 2$일 때, $f(2) = 2$이고 $f(2^2) = f(3 \times 1 + 1) = 1$ 이므로 $f(x) \neq f(x^2)$이다.

따라서, 옳은 것은 ㉠뿐이다.

19. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,

$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는

$2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

20. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ 에 대하여 $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x$$

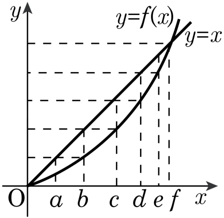
$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x) = f_{3\times 33+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$$\therefore\ f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

21. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$

④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

22. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}+1$, $x = \sqrt{y+1}+1$의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

① $3\sqrt{2}$　② $6\sqrt{2}$　③ $9\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{3}$　⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은
$y = \sqrt{x+1}+1$와 $y = x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+1}+1 = x$에서

$x+1 = (x-1)^2$

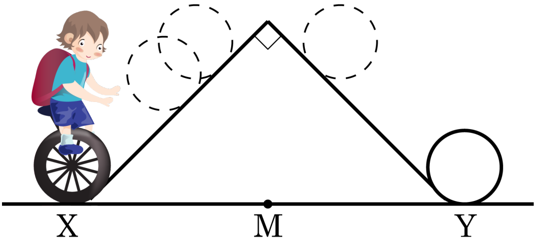
$x = 0,\ 3$

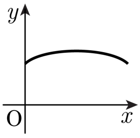
$x \geq 1$이므로 $x = 3$

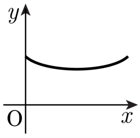
$\therefore \mathrm{P}(3, 3)$

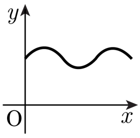
$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

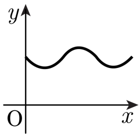
23. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

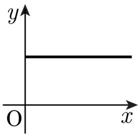


①


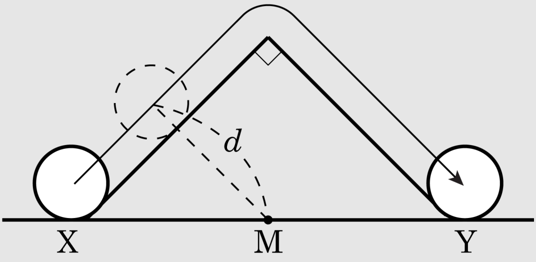
②


③


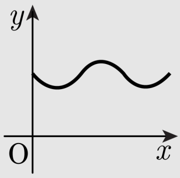
④


⑤


해설



따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는



24. 집합 $D=\{x\mid -2a\le x\le a\}$ 에서 집합 $R=\{x\mid x\text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x)=x^2+b$ 이고 $f(D)=D$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, $ab\neq 0$)

① $-\dfrac{1}{4}$　② $-\dfrac{1}{3}$　③ $-\dfrac{1}{2}$　④ $-\dfrac{3}{4}$　⑤ $-\dfrac{3}{5}$

해설

$a\ge -2a$ 이므로 $a>0$

그림에서

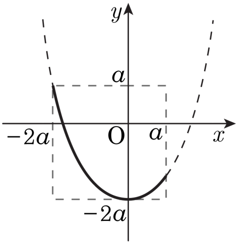
$f(0)=b=-2a\cdots$㉠

$$f(-2a)=4a^2+b$$
$$=a\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서

$a=\dfrac{3}{4},\ b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\dfrac{3}{4}$



25. 두 함수 $f(x) = ax+b(a \neq 0), g(x) = x+2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f^{-1})(3x-1) = 2x+1$ 이 성립할 때, $f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 이므로

준식은 $(f \circ g)^{-1}(3x-1) = 2x+1$ 이다.

$(f \circ g)(2x+1) = 3x-1$ 에서

$f(g(2x+1)) = 3x-1$, $f(2x+3) = 3x-1$

$2ax+3a+b = 3x-1$ 에서 $a = \dfrac{3}{2}$

$3a+b = -1$ 에서 $b = -\dfrac{11}{2}$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}$

$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = \dfrac{3}{2}k - \dfrac{11}{2} = 2$

$\therefore\ k = 5$