

1. 다음 중에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 높은 산들의 모임

② 작은 사람들의 모임

③ 몸무게가 60 kg 이하인 우리 학교 남학생의 모임

④ 우리나라에서 인구수가 가장 적은 도시의 모임

⑤ 우리 반 남학생 모임

해설

① ‘높은’이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

② ‘작은’이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

③ ‘60 kg 이하’라는 명확한 기준이 있으므로 집합이다.

④ ‘가장’이라는 단어가 명확한 기준을 제시하므로 집합이다.

⑤ ‘우리 반 남학생’은 기준이 명확하므로 집합이다.

2. 다음 보기 중 유한집합은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$

㉡ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 수}\}$

㉢ $\{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 큰 홀수}\}$

㉤ $\{x \mid x \text{는 무지개의 색깔}\}$

㉥ $\{x \mid x \text{는 우리나라의 놀이 동산}\}$

㉦ $\{x \mid x \text{는 우리나라 사람 중에서 '차'씨 인 사람}\}$

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

유한집합은 ㉠, ㉤, ㉥, ㉦의 모두 4개이다.

3. 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 7개

② 8개

③ 12개

④ 16개

⑤ 32개

해설

집합 A 의 원소의 개수가 4개이므로 부분집합의 개수는 $2^4 = 16(\text{개})$

4. 다음 중 옳은 것은?

① $\{5\} \subset \{5, 9\}$

② $2 \subset \{1, 3\}$

③ $4 \in \{1, 3, 5\}$

④ $\emptyset \in \{3\}$

⑤ $0 \in \emptyset$

해설

집합 $\{5\}$ 는 집합 $\{5, 9\}$ 의 부분집합이다.

5. 다음 두 집합 C, D 의 합집합의 원소의 개수를 구하여라.

$$C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$$

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12\}$$

$$\therefore n(C \cup D) = 9$$

6. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 $(A^c - B)^c$ 과 같은 집합은?

① $A \cup B$

② $A \cap B$

③ $A^c \cap B$

④ $(A \cup B)^c$

⑤ $(A \cap B)^c$

해설

$$(A^c - B)^c = (A^c \cap B^c)^c = (A \cup B)$$

7. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

①

-4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$f(x) = (x-1)(x+2)$ 에서

$f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고

$f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.

$\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

8. $\frac{\frac{4}{7 - \frac{3}{1 - \frac{2}{5}}}}$ 의 값은?

① 6

② 5

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{\frac{4}{7 - \frac{3}{1 - \frac{2}{5}}}} = \frac{\frac{4}{7 - \frac{3}{\frac{3}{5}}}} = \frac{\frac{4}{7 - 5}} = \frac{4}{2} = 2$$

9. 명제 ' $a = 1$ 이면 $a^2 = a$ 이다.'에 대하여 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고르면?

① 역

② 이

③ 대우

④ 역, 이

⑤ 역, 이, 대우

해설

$$a^2 - a = a(a - 1) = 0, a = 0, 1$$

역: ' $a^2 = a$ 이면 $a = 1$ 이다.' → 거짓

이: ' $a \neq 1$ 이면 $a^2 \neq a$ 이다.' → 거짓

대우: ' $a^2 \neq a$ 이면 $a \neq 1$ 이다.' → 참

10. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x - y + 4z)^2$$

$$18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

11. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

① $f(x) = 1 - x$

② $f(x) = |x| + 1$

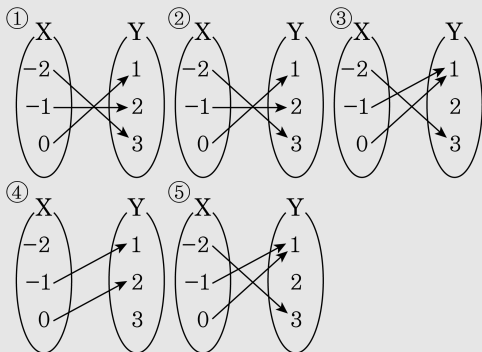
③ $f(x) = x^2 + x + 1$

④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④이다.

12. 함수 $y = -|x + 1| + 3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

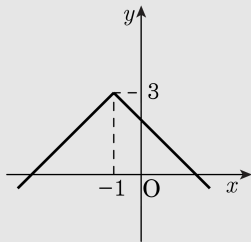
③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = -|x + 1| + 3$ 의 그래프는 다음
그림과 같으므로 최댓값은
 $x = -1$ 일 때, 3이다.



13. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

14. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

15. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = a \neq 0 \text{ 라 하면}$$

$$x = 2a, y = 3a$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2} &= \frac{4a^2 - 48a^2 + 9a^2}{4a^2 - 9a^2} \\ &= \frac{-35a^2}{-5a^2} = 7 \end{aligned}$$

16. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3$, $n = 1$

$$m + n = 4$$

17. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

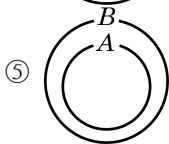
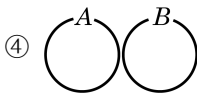
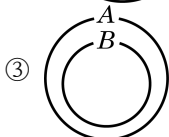
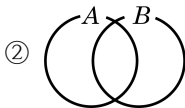
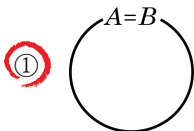
$$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이고}$$

$$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 - 2 = 3$$

18. $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다. 두 집합 A, B 의 원소가 모두 같다.

19. 전체 집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x \text{는 홀수}\}$, $B = \{1, 3, 4, 8\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B^c = \{5, 7, 9\}$

② $A \cap B = \{1, 3\}$

③ $B - A = \{4, 8\}$

④ $(A \cup B)^c = \{2, 6, 10\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{2, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 8\}$
이므로

⑤ $A^c \cap B^c = \{2, 6, 10\}$

20. 35명의 학생이 영어와 수학 중 적어도 한 과목을 신청해야 한다. 영어를 신청한 학생이 25명, 수학을 신청한 학생이 28명일 때, 수학만 신청한 학생수를 구하면?

① 7명

② 8명

③ 9명

④ 10명

⑤ 11명

해설

영어를 신청한 학생의 집합을 A, 수학을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(U) = 35$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 18$$

$$\therefore (\text{수학만 신청한 학생수}) = 28 - 18 = 10$$

21. 두 실수 a, b 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건을 모두 고르면?

① $p : |a| + |b| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

② $p : a^2 + b^2 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

③ $p : a + b \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : a^2 + b^2 + 2|ab| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

⑤ $p : a^3 + b^3 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

해설

$q \rightarrow p$ 이므로, $\sim p \rightarrow \sim q$ 인지 확인한다.

① $|a| + |b| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참

② $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참

③ $a + b = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓

반례 : $a = 4, b = -4$

④ $a^2 + b^2 + 2|ab| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$

$\rightarrow$ 참

⑤ $a^3 + b^3 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓

반례 : $a = 3, b = -3$

22. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1 , x_2 , x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$

② $\frac{144}{15}$

③ $\frac{144}{25}$

④ $\frac{288}{25}$

⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을

$\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$ 이라 하면

$\angle C$ 가 직각인 직각삼각형이므로

$$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$$

$$\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10 \text{ 이므로}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$$

코시-슈바르츠 부등식에서

$$(3^2 + 4^2 + 5^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$$

$$\therefore 50 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 576$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$$

따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

23. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2 \text{일 때}) \\ 0 & (x > 2 \text{일 때}) \end{cases} \text{라 정의하자. 이 때, } f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$1) f(1) = 2, f^2(1) = 3, f^3(1) = 0, f^4(1) = 1 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$$

$$2) f(3) = 0, f^2(3) = 1, f^3(3) = 2, f^4(3) = 3, f^5(3) = 0 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501}(3) = 3$$

$$\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$$

24. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$
 $f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)

$$\therefore h = f^{-1} \circ g$$

한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$$

$$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$$

25. A, B 두 자동차의 연비(연료 1l로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km

② 350 km

③ 400 km

④ 450 km

⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m - \frac{120}{5k}\right) : \left(3m - \frac{120}{6k}\right) = 7 : 5$$

$$\therefore mk = 20$$

따라서, A 자동차가 연료 4m 으로 갈 수 있는 총거리는

$$5k \times 4m = 20mk = 400(\text{km})$$