

1. 유리식 $\frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{x+2}{x-1}$ ② $\frac{x+1}{x+2}$ ③ $\frac{x+4}{x+2}$ ④ $\frac{x+1}{x-2}$ ⑤ $\frac{x+4}{x-2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4} &= \frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{(x-1)(x+2)^2} \\ &= \frac{x+4}{x+2}\end{aligned}$$

2. $\frac{x}{x^2 - xy} + \frac{y}{y^2 - xy}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{x}{x(x-y)} + \frac{y}{y(y-x)} = \frac{1}{x-y} + \frac{-1}{x-y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$(\text{준식}) = \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} \times \frac{(x-2)(x-5)}{x(x-5)} = 1$$

4. 유리식 $\frac{x^2+5x}{x^2-x-2} \div \frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{x+1}{x}$ ② $\frac{x}{x-1}$ ③ $\frac{x}{x+1}$ ④ $\frac{x-1}{x}$ ⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+5)}{(x-2)(x+1)} \div \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x(x+5)}{(x-2)(x+1)} \times \frac{(x-2)^2}{(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

5. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

6. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4} \end{aligned}$$

7. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

8. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

9. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
분다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

10. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2-y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1 \end{aligned}$$

11. 분수식 $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x-2}{x-1} - \frac{5x^2-7x+3}{x^2-x}$ 을 간단히 하면?

- ① $-\frac{x-3}{x(x+1)}$ ② $\frac{x-3}{x(x+1)}$ ③ $\frac{x+3}{x(x+1)}$
 ④ $\frac{x+3}{x(x-1)}$ ⑤ $\frac{x-3}{x(x-1)}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x(x-1) + (3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)} \\
 &= \frac{5x^2-x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)} \\
 &= \frac{(5x^3-x^2-2x) - (5x^2-7x+3)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x(x+1)}
 \end{aligned}$$

해설

분자의 차수를 줄여서 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\frac{2x}{x+1} + \frac{3x-2}{x-1} - \frac{5x^2-7x+3}{x^2-x} \\
 &= \frac{2(x+1)-2}{x+1} + \frac{3(x-1)+1}{x-1} - \frac{5(x^2-x)-2x+3}{x^2-x} \\
 &= (2+3-5) + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x-3}{x(x-1)} \\
 &= \frac{-2(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x-3}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x(-x+3) + (2x-3)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(x-1)(x+3)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{x(x+1)}
 \end{aligned}$$

12. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

13. 등식 $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b 의 합을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

양변에 $x(x+1)$ 을 곱하면

$$a(x+1) - bx = 1, ax + a - bx - 1 = 0$$

$$x(a-b) + (a-1) = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

14. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$

② $\frac{x+2}{x(x+1)}$

③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\ \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\ \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\ (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\ &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= -\frac{x-2}{x(x-1)}\end{aligned}$$

15. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
② $\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
③ $\frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
④ $\frac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
⑤ $\frac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \\&\quad - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) \\&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \\&= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} - \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} \\&= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\&= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

16. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \\ & \therefore x(x+8) = 9 \\ & x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0 \\ & x > 0 \text{ 이므로 } x = 1 \end{aligned}$$

17. $x = 4$ 일 때,
 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$ 의 값을
구하면?

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+a)(x+b)} &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) \text{ 이므로} \\ (\text{준식}) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} \\ &\quad - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \\ \therefore x = 4 \text{ 대입하면 } &\frac{1}{8} \end{aligned}$$

18. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + \cdots + f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{48}{49}$
- ② $\frac{50}{49}$
- ③ $\frac{51}{49}$
- ④ $\frac{49}{50}$
- ⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

(주어진 식) =
 $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$

19. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{18 \cdot 20}$ 을 계산한 값은?

① 0

② $\frac{9}{20}$

③ 40

④ $\frac{40}{9}$

⑤ $\frac{9}{40}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \cdots - \frac{1}{20} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

20. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{13 \times 14} = \frac{a}{14}$ 에서 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{14} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \\ \therefore a &= 13 \end{aligned}$$

21. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

22. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값은 ?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\therefore \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서 $2ab + 3 = 0$ 이므로 $ab = -\frac{3}{2}$

23. $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{43}{30}$ 을 만족하는 네 자연수 a, b, c, d 의 합 $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

우변을 좌변의 형태로 바꿔 나간다.

$$\begin{aligned} \frac{43}{30} &= 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} \\ \Rightarrow a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4 \\ \therefore a + b + c + d &= 10 \end{aligned}$$

24. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \end{aligned}$$

25. $x + 2y = 5$, $xy = 6$ 일 때, $\frac{2y}{x+1} + \frac{x}{2y+1}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{18}$

⑤ $\frac{1}{36}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2y}{x+1} + \frac{x}{2y+1} &= \frac{2y(2y+1) + x(x+1)}{(x+1)(2y+1)} \\ &= \frac{(x+2y)^2 - 4xy + (x+2y)}{2xy + (x+2y) + 1} \\ &= \frac{5^2 - 4 \times 6 + 5}{2 \times 6 + 5 + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

26. $x + y = 6$, $xy = 4$ (단, $x > y$) 일 때, $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$ 의 값은?

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} x + y &= 6, \quad xy = 4 \quad (x > y) \text{ 이면} \\ (x - y)^2 &= (x + y)^2 - 4xy = 36 - 16 = 20 \\ \therefore x - y &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (\because x > y) \\ (\text{준 식}) &= \frac{(x - y)^3 + 3xy(x - y)}{(x + y)^3 - 3xy(x + y)} \\ &= \frac{\sqrt{20}^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{20}}{6^3 - 3 \cdot 4 \cdot 6} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

27. 0이 아닌 두 실수 a, b 가 $\frac{a+2b}{2a-3b} = 1$ 을 만족할 때, $\frac{a^2+ab+2b^2}{(a-b)(a+2b)}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{7}$

② $\frac{8}{9}$

③ $\frac{8}{15}$

④ $\frac{15}{8}$

⑤ $\frac{9}{8}$

해설

$$\frac{a+2b}{2a-3b} = 1 \text{ 에서 } a+2b = 2a-3b \text{ 이므로 } a = 5b$$

$$\therefore \frac{a^2+ab+2b^2}{(a-b)(a+2b)} = \frac{(5b)^2+5b \times b+2b^2}{(5b-b)(5b+2b)}$$

$$= \frac{32b^2}{4b \times 7b} = \frac{32b^2}{28b^2} = \frac{8}{7}$$

28. $\frac{3x-2y}{x} = \frac{3x-4y}{y}$ 일 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① -1

② 1

③ 2

④ -2

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$(3x-2y)y = x(3x-4y)$$

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0,$$

$$(3x-y)(x-2y) = 0$$

$$x > y > 0 \text{ 이므로 } x = 2y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

29. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

30. $x + y - z = 2x + 3y - 2z = -x - 2y + 2z$ 일 때,
 $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$ 를 가장 간단한 정수비로 나타내면?
- ① $3 : 2 : 5$ ② $3 : 5 : -5$ ③ $2 : 3 : 5$
④ $3 : 5 : 2$ ⑤ $2 : 3 : -2$

해설

$x + y - z = 2x + 3y - 2z$ 에서 $x + 2y = z \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $x + y - z = -x - 2y + 2z$ 에서 $2x + 3y = 3z \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $y = -z, x = 3z$
 $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$
 $= \left(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{3z}\right) : \left(\frac{1}{3z} - \frac{2}{z}\right)$
 $= \left(\frac{1}{z}\right) : \left(\frac{5}{3z}\right) : \left(-\frac{5}{3z}\right)$
 $= 3 : 5 : -5$

31. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{5x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{7}$
- ② $\frac{7}{5}$
- ③ $\frac{3}{7}$
- ④ $\frac{7}{3}$
- ⑤ 1

해설

$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$

$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 에서 정리하면

$y = \frac{5}{3}z$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 에서 정리하면

$x = \frac{1}{3}z$

$\therefore x : y : z = \frac{1}{3}z : \frac{5}{3}z : z$

$= 1 : 5 : 3$

$x = 1, y = 5, z = 3$ 을 대입하면

$(\text{준식}) = \frac{5 - 5 + 25}{1 + 25 + 9} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

32. 유리식 $\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c}$ 의 값을 k_1, k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c} = k \text{라 하면}$$

(i) $3a+2b+c \neq 0$ 일 때,

$$k = \frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a+2b+c = 0$ 일 때,

$$k = \frac{3a+2b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$$

$$\therefore \{k_1, k_2\} = \{2, -1\}$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 1$$

33. $\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4}$ 일 때 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{3}{11}$
- ② $\frac{5}{11}$
- ③ $\frac{6}{11}$
- ④ $\frac{8}{11}$
- ⑤ $\frac{9}{11}$

해설

$\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4} = k$ 라 하면

$2x+y=2k \cdots ①$

$2y+z=3k \cdots ②$

$2z+x=4k \cdots ③$

②, ③에서 z 를 소거하면

$x-4y=-2k \cdots ④$

① $\times 4 + ④$ 에서 $x = \frac{2}{3}k, y = \frac{2}{3}k$

이것을 ②에 대입하면 $z = \frac{5}{3}k$

따라서 $x:y:z = \frac{2}{3}k : \frac{2}{3}k : \frac{5}{3}k = 2:2:5$

$x=2t, y=2t, z=5t$ 라 하면

(준식) $= \frac{4t^2+10t^2+10t^2}{(2t)^2+(2t)^2+(5t)^2} = \frac{24t^2}{33t^2} = \frac{8}{11}$

34. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{3} \quad & \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \\ \textcircled{5} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c} \\ \textcircled{4} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

35. 한 변의 길이가 a 인 정삼각형과 반지름의 길이가 b 인 원의 넓이가 같을 때, $a^4 : b^4$ 의 값은?

① $8\pi^2 : 3$

② $8\pi^2 : 5$

③ $4\pi^2 : 1$

④ $12\pi^2 : 5$

⑤ $16\pi^2 : 3$

해설

정삼각형과 원의 넓이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, πb^2 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi b^2, a^2 : b^2 = 4\pi : \sqrt{3}$$

$$\therefore a^4 : b^4 = 16\pi^2 : 3$$

36. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 X , 무색생물의 수가 Y 일 때, $\frac{Y}{X+Y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 10(%)이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과, 지난 달에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 퍼센트(%) 인가?
- ① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%
- ④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

해설

지난 달 유색 생물의 수를 X , 무색 생물의 수를 Y 라 하면 $\frac{Y}{X+Y} \times 100 = 10$
따라서, $\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{10}$ 에서 $X = 9Y$
한편, 이번 달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$
이므로 이번 달의 생물학적 지표는
$$\frac{3Y}{2X+3Y} \times 100 = \frac{3Y}{2 \cdot 9Y + 3Y} \times 100$$
$$= \frac{1}{7} \times 100 \approx 14.3(\%)$$

37. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?
- ① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
 $= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$
 $= (b-c+c-a+a-b)x$
 $+ (-ab+ac-bc+ab-ca+cb) = 0$
 $\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
 a, b, c 는 서로 다른 수이고
 $f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$
 $f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$
그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고
 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
 $\therefore f(2013) = 0$

38. 다음은 $\frac{x^2-x-3}{x-1} - \frac{x^2+x-1}{x+1}$ 를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2-x-3}{x-1} = (\textcircled{\text{㉠}}) + \frac{(\textcircled{\text{㉡}})}{x-1}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = (\textcircled{\text{㉢}}) + \frac{(\textcircled{\text{㉣}})}{x+1}$$

- ㉠ $-x, +3, x, -1, \frac{2x+4}{x^2-1}$

㉡ $x, -3, x, -1, -\frac{2x+4}{x^2-1}$
- ㉢ $x, 3, x, 1, -\frac{2x+4}{x^2+1}$

㉣ $x, -1, x, -3, -\frac{2x-4}{x^2-1}$
- ㉤ $x, 1, x, 3, -\frac{2x+4}{x^2+1}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x-3}{x-1} &= \frac{x(x-1)-3}{x-1} = x + \frac{-3}{x-1} \\ \frac{x^2+x-1}{x+1} &= \frac{x(x+1)-1}{x+1} = x + \frac{-1}{x+1} \\ \therefore \textcircled{\text{㉠}} &= x, \textcircled{\text{㉡}} = -3, \textcircled{\text{㉢}} = x, \textcircled{\text{㉣}} = -1 \\ (\text{준식}) &= x - \frac{3}{x-1} - \left(x - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{x-1-3(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= -\frac{2x+4}{x^2-1} \end{aligned}$$

39. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

㉠ $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

㉡ $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$

㉢ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$

㉣ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$

㉤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2} = \sqrt{1} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, $\dots$, $\sqrt{30} = \sqrt{5} \times \sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5} \times \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} = \frac{6-\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

40. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

- ① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{1}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{12}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{14}} = \frac{14}{17}$$

$$\therefore A = \frac{7}{12}, B = \frac{9}{11}, C = \frac{14}{17}$$

$$\therefore A < B < C$$

41. 서로소인 두 자연수 $m, n (m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은?
- $$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$
- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{18}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{2}{3}}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{2}}}}}}} \\ &\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3 \text{ 이므로} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + 2 + 1 + 3 = 7 \end{aligned}$$

42. $\frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + xy + y^2} = 2$ 일 때, $\frac{3(x-y)}{x+y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① $2\sqrt{6} + 3$

② $2\sqrt{6} - 3$

③ $3 - 2\sqrt{6}$

④ $3 + 2\sqrt{6}$

⑤ $5 - 6\sqrt{2}$

해설

$$3x^2 - 2xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

$\therefore x^2 - 4xy - 2y^2 = 0$ 이 식의 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2 + \sqrt{6} \quad (\because x > y > 0 \text{에서 } \frac{x}{y} > 1)$$

$$\therefore \frac{3(x-y)}{x+y} = \frac{3\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{\frac{x}{y} + 1} = 2\sqrt{6} - 3$$

43. $a + b = 4ab$, $b + c = 10bc$, $c + a = 6ca$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$a + b = 4ab \text{에서 } \frac{a+b}{ab} = 4$$

$$\text{즉 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{같은 방법으로 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 6 \cdots \textcircled{3}$$

① + ② + ③하면

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 20$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10$$

44. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

45. 세 자연수 a, b, c 가 $\frac{2b}{a} = \frac{3c}{2b} = \frac{a}{3c}$ 를 만족하고 a, b, c 의 최소공배수가 12 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 22 ② 20 ③ 18 ④ 16 ⑤ 14

해설

$a + 2b + 3c \neq 0$ ($\because a, b, c$ 는 자연수) 이므로
가비의 리에 의하여

$$\frac{2b}{a} = \frac{3c}{2b} = \frac{a}{3c} = \frac{a + 2b + 3c}{a + 2b + 3c} = 1 \text{ 에서}$$

$$a = 3c, a = 2b \therefore b = \frac{1}{2}a, c = \frac{1}{3}a$$

$$\therefore a : b : c = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$$

$$= 6 : 3 : 2$$

세 수의 최대공약수를 G 라 하면

$$a = 6G, b = 3G, c = 2G$$

$$(\text{최소공배수}) = 6G = 12, G = 2$$

$$\text{그러므로 } a = 12, b = 6, c = 4$$

$$\therefore a + b + c = 22$$

46. 어떤 버스 회사에서 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수가 $b\%$ 감소되지만, 수입은 $x\%$ 증가한다고 한다. 이때, x 를 a, b 를 사용하여 나타내면?

- ① $x = \frac{(100+a)(100-b)}{100}$
- ② $x = (100+a)(100-b)$
- ③ $x = \frac{a-b+1}{100}$
- ④ $x = a-b-ab$
- ⑤ $x = a-b-\frac{ab}{100}$

해설

요금 인상 전의 버스 요금을 g , 승객의 수를 h 라 하면 버스 회사 수입은 gh 원이고 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수는 $b\%$ 감소된다.

인상 후의 버스 회사 수입은

$$g\left(1+\frac{a}{100}\right)\times h\left(1-\frac{b}{100}\right)$$
$$= \frac{100+a}{100}\times \frac{100-b}{100}\times gh(\text{원}) \text{이므로}$$
$$\frac{100+a}{100}\times \frac{100-b}{100}\times gh$$
$$= \left(1+\frac{x}{100}\right)\times gh$$
$$(100+a)(100-b) = 100(100+x)$$
$$\therefore x = a-b-\frac{ab}{100}$$

47. A, B, C 세 사람이 두 명씩조를 짜서 x m를 달리는 시합을 하였다. A는 B를 20 m차이로 이겼고, B는 C를 10 m, A는 C를 28 m차이로 각각 이겼다. 세 사람의 속도가 일정하다면 세 사람이 시합을 한 거리 x m는 얼마인가?

- ① 80 m ② 100 m ③ 120 m
④ 140 m ⑤ 160 m

해설

A, B, C의 속도를 각각, a , b , c 라 하면

$$\frac{x}{a} = \frac{x-20}{b} \dots ①$$

$$\frac{x}{b} = \frac{x-10}{c} \dots ②$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x-28}{c} \dots ③$$

$$①, ③에서 \frac{x-20}{b} = \frac{x-28}{c} \dots ④$$

$$②, ④에서 \frac{x}{x-20} = \frac{x-10}{x-28}$$

$$\therefore x(x-28) = (x-10)(x-20)에서$$

$$x^2 - 28x = x^2 - 30x + 200$$

$$\therefore 2x = 200에서 x = 100$$

48. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

- ① $ad = bc$
② $ab : cd = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$
③ $a : (a + b) = c : (c + d)$
④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d$
⑤ $(a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

해설

$a : b = c : d$ 에서 $c = ka, d = kb$ 라 놓자.

① $ad = a \cdot kb = kab, bc = b \cdot ka = kab$
 $\therefore ad = bc$

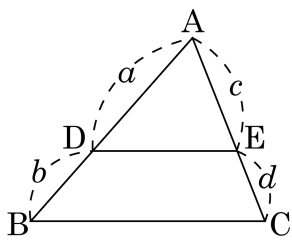
② $ab : cd = ab : k^2 ab = 1 : k^2$
 $\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b}{a} : \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} : \frac{b}{a} = 1 : 1$
 $\therefore ab : cd \neq \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d) = ka : k(a + b) = a : a + b$
 $\therefore a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d = (ka + 2) : kb$
 $\therefore (a + 2) : b \neq (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d)$
 $= (a + b) : (ka + kb) = 1 : k, (2a + b) : (2c + d)$
 $= (2a + b) : (2ka + kb) = 1 : k$
 $\therefore (a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

49. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{EC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것은? (단, $a \neq b$)



① $ad = bc$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

④ $\frac{c+d}{a+b} = \frac{d}{a}$

해설

 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots \textcircled{7}$$

① $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로 $ad = bc$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 이므로 } \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 이므로 } \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{C}$$

④ ㉠ ÷ ㉡에서 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c}{a}$$

$$\textcircled{5} \quad \textcircled{E} \div \textcircled{L} \text{에서 } \frac{a-b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{c-d}{\frac{c+d}{2}}$$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$$

50. a, b, c 가 서로 다른 복수소일 때, $\frac{b}{a-1} = \frac{c}{b-1} = \frac{a}{c-1} = k$ 라고 하자. 이 때, $1 + k + k^2 + \cdots + k^{2000}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$b = ak - k, c = bk - k, a = ck - k$
 $\therefore b - c = (a - b)k, c - a = (b - c)k, a - b = (c - a)k$ 에서
변변끼리 곱하면,
 $(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)(b - c)(c - a)k^3$
 $\therefore k^3 = 1, k^2 + k + 1 = 0$
(준식) $= (1 + k + k^2) + k^3(1 + k + k^2) + \cdots$
 $+ k^{1998}(1 + k + k^2)$
 $= 0$