

1. $\frac{x}{x^2 - xy} + \frac{y}{y^2 - xy}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x}{x(x-y)} + \frac{y}{y(y-x)} = \frac{1}{x-y} + \frac{-1}{x-y} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$(\text{준식}) = \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} \times \frac{(x-2)(x-5)}{x(x-5)} = 1$$

3. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2
 \end{aligned}$$

4. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

5. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} \text{의 우변을 통분하여 계산하면}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

6. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

7. 분수식 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x+1)}$

② $\frac{1}{x(x+2)}$

③ $\frac{1}{x(x+1)}$

④ $\frac{2}{x(x+2)}$

⑤ $\frac{3}{x(x+2)}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}\end{aligned}$$

8. $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ 를 풀면?

① 6

② 8

③ $\frac{31}{2}$

④ 24

⑤ 512

해설

분자, 분모에 2^3 을 곱하면

$$\frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^3(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4})} = \frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}$$

$$= 2^3 = 8$$

해설

$$\frac{2 + 1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{16}} = 8$$

9. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y) \{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

10. 분수식 $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x-2}{x-1} - \frac{5x^2-7x+3}{x^2-x}$ 을 간단히 하면?

① $-\frac{x-3}{x(x+1)}$

② $\frac{x-3}{x(x+1)}$

③ $\frac{x+3}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+3}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-3}{x(x-1)}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{2x(x-1) + (3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)} \\ &= \frac{5x^2-x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)} \\ &= \frac{(5x^3-x^2-2x) - (5x^2-7x+3)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x(x+1)} \end{aligned}$$

해설

분자의 차수를 줄여서 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{2x}{x+1} + \frac{3x-2}{x-1} - \frac{5x^2-7x+3}{x^2-x} \\ &= \frac{2(x+1)-2}{x+1} + \frac{3(x-1)+1}{x-1} - \frac{5(x^2-x)-2x+3}{x^2-x} \\ &= (2+3-5) + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x-3}{x(x-1)} \\ &= \frac{-2(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x-3}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(-x+3) + (2x-3)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{x(x+1)} \end{aligned}$$

11. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ ㉡?

① $\frac{x}{x+1}$

② $\frac{x+1}{x-1}$

③ 1

④ $x - \frac{1}{x}$

⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

12. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

13. 등식 $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$$x^2 + 1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2 = 2a$

$$\therefore a = 1$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $5 = -b$

$$\therefore b = -5$$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $10 = 2c$

$$\therefore c = 5$$

$$\therefore abc = -25$$

14. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$

② $\frac{x+2}{x(x+1)}$

③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\ \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\ \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\ (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\ &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= -\frac{x-2}{x(x-1)} \end{aligned}$$

15. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ② $\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ③ $\frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ④ $\frac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ⑤ $\frac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{준 식}) &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \\
 &\quad - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) \\
 &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \\
 &= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} - \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\
 &= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}
 \end{aligned}$$

16. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore x(x+8) = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 1$$

17. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + \cdots + f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{48}{49}$

② $\frac{50}{49}$

③ $\frac{51}{49}$

④ $\frac{49}{50}$

⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{(x+1) - x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{이므로} \end{aligned}$$

(주어진 식) =

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) = 1 - \frac{1}{50} = \\ &\frac{49}{50} \end{aligned}$$

18. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{18 \cdot 20}$ 을 계산한 값은?

- ① 0 ② $\frac{9}{20}$ ③ 40 ④ $\frac{40}{9}$ ⑤ $\frac{9}{40}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \cdots - \frac{1}{20} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

19. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

20. 분수식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}}$ 을 간단히 하면?

① $-a$

② a

③ $a - 1$

④ $1 - a$

⑤ $2a - 1$

해설

밑에서부터 계산해 올라간다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{a+1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a+1}{a}} \\ &= \frac{1}{\frac{-1}{a}} = -a\end{aligned}$$

21. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$$

22. 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $\frac{75}{23} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$ 일 때, $a + b + c + d$

의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

해설

$$\frac{75}{23} = 3 + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

$$\therefore a = 3, b = 3, c = 1, d = 5$$

$$\therefore a + b + c + d = 12$$

23. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$(\text{주어진 식}) = (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2}$$

$$= -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$= -\frac{-x + 1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2} = 1$$

24. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

$$x \text{로 나누면, } x - 7 + \frac{1}{x} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$$

25. $\frac{3}{a} + \frac{3}{b} = \frac{16}{a+b}$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{3}$

② $\frac{10}{3}$

③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{16}{3}$

⑤ $\frac{17}{3}$

해설

$$\frac{3}{a} + \frac{3}{b} = \frac{16}{a+b}, \quad \frac{3(a+b)}{ab} = \frac{16}{a+b}$$

$$3(a+b)^2 = 16ab \quad \therefore 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$$

$$(3a-b)(a-3b) = 0 \quad \therefore \frac{b}{a} = 3, \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

26. $x + y = 6$, $xy = 4$ (단, $x > y$) 일 때, $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$ 의 값은?

① $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

② $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

③ $2\sqrt{5}$

④ $4\sqrt{5}$

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$x + y = 6, \quad xy = 4 \quad (x > y) \text{ 이면}$$

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 36 - 16 = 20$$

$$\therefore x - y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (\because x > y)$$

$$(\text{준 식}) = \frac{(x - y)^3 + 3xy(x - y)}{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}$$

$$= \frac{\sqrt{20}^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{20}}{6^3 - 3 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

27. $a^3 + b^3 = 7, a + b = 1$ 일 때, $\frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2}$ 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

해설

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow ab = -2$$

$$\therefore \frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2} = \frac{a^3 + b^3}{(ab)^2} = \frac{7}{(-2)^2} = \frac{7}{4}$$

28. $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p + q = 32$

해설

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 4k, b = 3k, c = 2k$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{11}{21}$$

$$\therefore p + q = 11 + 21 = 32$$

29. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

30. 세 실수 x, y, z 의 평균이 4이고, $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5}$ 가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값은?

① $\frac{7}{12}$

② $\frac{9}{12}$

③ $\frac{10}{12}$

④ $\frac{11}{12}$

⑤ $\frac{13}{12}$

해설

평균이 4이므로, $x + y + z = 12 \cdots \textcircled{1}$

$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k$ 라 하면,

$$\begin{cases} x+y=3k \\ y+z=4k \\ z+x=5k \end{cases}$$

다 더하면, $2(x+y+z) = 12k \Rightarrow k = 2 (\because \textcircled{1})$

다시 k 를 위 식에 대입하고 연립방정식의 풀면 x, y, z 를 구할 수 있다.

$$x = 4, y = 2, z = 6$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

31. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

① $\frac{2}{7}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

32. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ 를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow x+y=5k, y+z=6k, z+x=7k$$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k, y=2k, z=4k$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2} \\ &= \frac{25k^2 - 16k^2}{9k^2 - 4k^2 + 16k^2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore m=7, n=3$$

$$\therefore m+n=10$$

33. x, y, z 가 양의 실수이고, $\frac{x(y+z)}{15} = \frac{y(z+x)}{13} = \frac{z(x+y)}{18}$ 일 때,
 $x:y:z$ 를 구하면?

① $1:2:4$

② $3:4:5$

③ $5:4:8$

④ $4:7:9$

⑤ $4:7:5$

해설

$$\frac{x(y+z)}{15} = \frac{y(z+x)}{13} = \frac{z(x+y)}{18} = k$$

$$xy + xz = 15k, \quad yz + yx = 13k, \quad zx + zy = 18k$$

$$\text{변변끼리의 합은 } 2(xy + yz + zx) = 46k$$

$$\therefore xy + yz + zx = 23k$$

$$yz = 8k, \quad zx = 10k, \quad xy = 5k$$

$$\text{변변끼리 곱하면 } (xyz)^2 = 400k^3, \quad xyz > 0$$

$$\therefore xyz = 20k\sqrt{k}$$

$$x = \frac{5}{2}\sqrt{k}, \quad y = 2\sqrt{k}, \quad z = 4\sqrt{k}$$

$$\therefore x:y:z = 5:4:8$$

34. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\textcircled{1} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{㉢}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉣} \div \textcircled{㉢}$ 하면

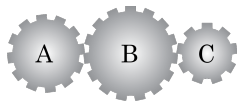
$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

35. 톱니의 개수가 각각 x, y, z 개인 기어 A, B, C
가 그림과 같이 물려 돌아가고 있을 때, A, B, C
의 각 속도의 비는?



- ① $x : y : z$ ② $z : y : x$ ③ $y : z : x$
 ④ $yz : xz : xy$ ⑤ $xz : yx : zy$

해설

일정한 시간에 물려 돌아간 톱니의 개수는 같다. 톱니의 개수가
많을수록 회전 속도 즉, 각 속도는 느리다. 따라서 톱니의 개수와
각 속도는 반비례한다.

$$\therefore \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = yz : xz : xy$$

36. 작년에 3 만원 하던 야구 배트와 2 만원 하던 글러브가 올해는 각각 10%, 15%가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?

① 11.5%

② 12%

③ 12.5%

④ 13%

⑤ 13.5%

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000 + 20000 = 50000$ (원)

금년의 야구 배트의 가격 : $30000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33000$ (원)

금년의 글러브의 가격 : $20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 23000$ (원)

금년의 한 세트의 가격 : $33000 + 23000 = 56000$ (원)

따라서 한 세트의 가격은 $56000 - 50000 = 6000$ (원) 인상되었으므로,

인상률은 $\frac{6000}{50000} \times 100 = 12(\%)$ 이다.

37. $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ 이라 정의 할 때, $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)$ 를 계산하면?

① $\frac{1}{2n-1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

② $\frac{1}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n-1}{2n+1}$

③ $\frac{n}{2n-1}$

해설

$$1 - \frac{2}{2k+1} = \frac{2k-1}{2k+1} \text{ 이므로}$$

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

38. 다음은 $\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} - \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ 를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} = (\text{㉠}) + \frac{(\text{㉡})}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = (\text{㉢}) + \frac{(\text{㉣})}{x + 1}$$

- ① $-x, +3, x, -1, \frac{2x+4}{x^2-1}$
 ③ $x, 3, x, 1, -\frac{2x+4}{x^2+1}$
 ⑤ $x, 1, x, 3, -\frac{2x+4}{x^2+1}$

- ② $x, -3, x, -1, -\frac{2x+4}{x^2-1}$
 ④ $x, -1, x, -3, -\frac{2x-4}{x^2-1}$

해설

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} = \frac{x(x - 1) - 3}{x - 1} = x + \frac{-3}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - 1}{x + 1} = x + \frac{-1}{x + 1}$$

$$\therefore \text{㉠} = x, \text{㉡} = -3, \text{㉢} = x, \text{㉣} = -1$$

$$(\text{준식}) = x - \frac{3}{x - 1} - \left(x - \frac{1}{x + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{x + 1} - \frac{3}{x - 1}$$

$$= \frac{x - 1 - 3(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= -\frac{2x + 4}{x^2 - 1}$$

39. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

① $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

② $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$

③ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$

④ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$

⑤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2} = \sqrt{1} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, ..., $\sqrt{30} = \sqrt{5} \times \sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5} \times \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} = \frac{6-\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

40. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 5}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + 4.5}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{7.5}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{15}} = \frac{1}{\frac{17}{15}} = \frac{15}{17}$$

$$\therefore A = \frac{2}{7}, B = \frac{2}{7}, C = \frac{15}{17}$$

$$\therefore A < B < C$$

41. 서로소인 두 자연수 $m, n(m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{18}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{1 + \frac{3}{3}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

42. $\frac{2}{x} - z = 1$, $y - \frac{1}{z} = 1$ 일 때, xyz 의 값은?

① -2

② -1

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{2}{x} - z = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{z+1}$$

$$y - \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \frac{z+1}{z}$$

$$\therefore xyz = \frac{2}{z+1} \times \frac{z+1}{z} \times z = 2$$

43. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\text{즉, } \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서, $2ab + 3 = 0$ 이고, $ab = -\frac{3}{2}$ 이다.

44. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 일 때, $\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k (\neq 0) \text{로 놓으면 } a = bk, b = ck$$

$$\therefore a = ck^2$$

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)} &= \frac{(ck^2 - ck)(ck + c)}{(ck^2 + ck)(ck - c)} \\ &= \frac{ck(k-1) \cdot c(k+1)}{ck(k+1) \cdot c(k-1)} = 1 \end{aligned}$$

45. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k (k \neq 0) \text{ 라 하면}$$

$$xy + zx = 27k, \quad zy + xy = 32k, \quad zx + yz = 35k \text{ 이므로}$$

$$2(xy + yz + zx) = 94k, \quad \therefore xy + yz + zx = 47k \text{ 이므로}$$

$$yz = 20k, \quad zx = 15k, \quad xy = 12k$$

$$\text{또, } x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3 \text{ 이므로}$$

$$x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3 \text{ 에서 } x^2 = 9k$$

$$225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3 \text{ 에서 } y^2 = 16k$$

$$144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3 \text{ 에서 } z^2 = 25k$$

$$\therefore \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{9k + 16k}{25k} = 1$$

46. 분수식 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

① $-1, 2$

② $1, 2$

③ $2, \frac{1}{2}$

④ $1, \frac{1}{2}$

⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

$$b+c = ak \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a+c = bk \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+b = ck \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 하면

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

i) $a+b+c \neq 0$ 이면 $k = 2$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때 $b+c = -a$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\therefore k = -1, 2$$

47. 어느 회사원의 연간 소득은 Y 원이다. 이 소득의 $a\%$ 에 대해서는 세금이 부과되지 않고, 그 나머지 소득에 대해서만 $b\%$ 의 세금이 부과된다. 이 사람은 세금을 납부하고 난 후의 소득 중 C 원을 소비하고 나머지는 모두 저축한다. 이 사람의 연간 저축액 S 원은?

$$\textcircled{1} S = \left(1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right) Y - C$$

$$\textcircled{2} S = \left(1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right) Y + C$$

$$\textcircled{3} S = \left(1 - \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} + \frac{b}{100}\right) Y - C$$

$$\textcircled{4} S = \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right) Y + C$$

$$\textcircled{5} S = \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right) Y - C$$

해설

비과세 소득은 $Y \times \frac{a}{100}$ 원이고 나머지 금액 $Y \left(1 - \frac{a}{100}\right)$ 에 대한 $b\%$ 의 세금을 납부하고 C 원을 소비한 후 저축하므로

$$\begin{aligned} S &= Y \times \frac{a}{100} + Y \left(1 - \frac{a}{100}\right) \left(1 - \frac{b}{100}\right) - C \\ &= \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right) Y - C \end{aligned}$$

48. a, b, c 가 서로 다른 수이고, $\langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c}$ 라고 정의한다. $\langle a, b, c \rangle = x$ 라 할 때, $\langle b, c, a \rangle$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$ 라 하자. 이때, x 에 관한 식 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(10)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$(i) \langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c} = x$$

$$\therefore a = c + (b-c)x$$

$$\begin{aligned} (ii) \langle b, c, a \rangle &= \frac{b-a}{c-a} = \frac{b - \{c + (b-c)x\}}{c - \{c + (b-c)x\}} \\ &= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(9) \times f(10)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{1}{10}$$

49. 비례식 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} (\neq 1)$ 가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb + nd \neq 0, b + d + f \neq 0$)

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{㉡} & \frac{2a+3b}{a-b} = \frac{2c+3d}{c-d} \\ \textcircled{㉢} & \frac{a}{b} = \frac{ma+nc}{mb+nd} \\ \textcircled{㉣} & \frac{ab+cd}{a^3+\frac{c^3}{b^2}} = \frac{a^2+c^2}{e^3+\frac{f^3}{d^2}} \\ \textcircled{㉤} & \frac{ab+cd}{a^3+\frac{c^3}{b^2}} = \frac{a^2+c^2}{e^3+\frac{f^3}{d^2}} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2} \end{aligned}$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{로 놓으면}$$

$$a = bk, c = dk, e = fk$$

$$\textcircled{㉠} \text{ (좌변)} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉡} \text{ (좌변)} = \frac{2bk+3b}{bk-b} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{2dk+3d}{dk-d} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉢} \text{ (좌변)} = \frac{bk}{b} = k$$

$$\text{ (우변)} = \frac{mbk+ndk}{mb+nd} = k$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉣} \text{ (좌변)} = \frac{bk \cdot b + dk \cdot d}{bk \cdot b - dk \cdot d} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\text{ (우변)} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2k^2 - d^2k^2} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

$$\textcircled{㉤} \text{ (좌변)} = \frac{b^3k^3}{b^2} + \frac{d^3k^3}{d^2} + \frac{f^3k^3}{f^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\text{ (우변)} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\therefore \text{ (좌변)} = \text{ (우변)}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.

50. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $ad = bc$

② $ab : cd = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

해설

$a : b = c : d$ 에서 $c = ka, d = kb$ 라 놓자.

① $ad = a \cdot kb = kab, bc = b \cdot ka = kab$

$\therefore ad = bc$

② $ab : cd = ab : k^2 ab = 1 : k^2$

$\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b}{a} : \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} : \frac{b}{a} = 1 : 1$

$\therefore ab : cd \neq \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d) = ka : k(a + b) = a : a + b$

$\therefore a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d = (ka + 2) : kb$

$\therefore (a + 2) : b \neq (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d)$

$= (a + b) : (ka + kb) = 1 : k, (2a + b) : (2c + d)$

$= (2a + b) : (2ka + kb) = 1 : k$

$\therefore (a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$