1. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때,

부등식 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq$ □가 항상 성립한다. □ 안에 알맞은 최댓값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 12

해설

$a,\ b,\ c$ 가 모두 양수이므로
$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$
따라서

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

2. $x,\ y$가 0보다 큰 실수일 때, $(2x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값은?

① 16 ② 18 ③ 19 ④ 25 ⑤ 27

해설

$$\begin{aligned}(2x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right) &= 17+\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}\\ &\geq 17+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}\\ &= 17+8=25\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2x}{y}=\frac{8y}{x}$ 일 때 최솟값은 25 이다.

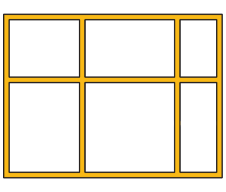
3. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　② $5+5\sqrt{2}$　③ 25
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면
$a^2+b^2=25$이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

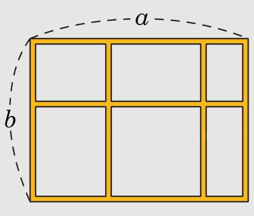
4. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because\ 3a + 4b = 240)$

$\therefore\ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240,$

$\therefore\ a = 40$

5. $a>1$일 때, $\frac{1}{a-1}+4a-3$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

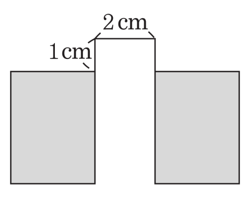
해설

$\frac{1}{a-1}>0$

$4(a-1)+1+\frac{1}{a-1}\geq 2\cdot\sqrt{4(a-1)\cdot\frac{1}{(a-1)}}+1$

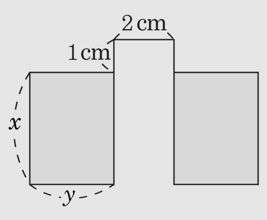
$=2\cdot 2+1=5$

6. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,cm^2$　② $1200\,cm^2$　③ $1600\,cm^2$　④ $2000\,cm^2$　⑤ $2400\,cm^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의
가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면
$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서
$4x + 2y = 196 x > 0,\ y > 0$ 이므로
(산술평균) $\geq$(기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

7. $x < 0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2 +$ ㉡하면

$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2+2}{x}$

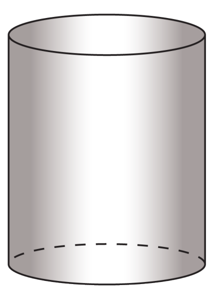
$\therefore f(x) = \frac{x^2+2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$

$x < 0$이므로

$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \le -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를
x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V=\pi x^2 y=64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S=(2x)^2\times 2+2\pi xy=8x^2+2x\pi y$
$=8x^2+2x\times\dfrac{64}{x^2}=8x^2+\dfrac{128}{x}$
$=8x^2+\dfrac{64}{x}+\dfrac{64}{x}\geq 3\sqrt[3]{8x^2\times\dfrac{64}{x}\times\dfrac{64}{x}}=96$
단, 등호는 $8x^2=\dfrac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x=2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

9. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$y=\frac{1}{4}(5-3x)$

$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$

$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$

$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$

10. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=1$이고 $x^2+y^2=2$이 성립할 때, $ax+by$의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$에 주어진 값
$a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=2$을 대입하면
$1\times 2 \geq (ax+by)^2$이다.
따라서 $-\sqrt{2} \leq ax+by \leq \sqrt{2}$
$\therefore ax+by$의 최댓값은
$\sqrt{2}$이다.

11. $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$　② $2\sqrt{35}$　③ $3\sqrt{35}$　④ $4\sqrt{35}$　⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$\left\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right\}(1 + 4 + 9)$
$\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
$(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$

$\therefore\ 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
$(\because x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$
$\therefore\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은

$2\sqrt{35}$

12. 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $a+b+c+d=8,\ a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8,\ a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d,\ a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로

$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$

$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372 \leq 0$

$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$

$\therefore -7 \leq d \leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

이므로 $m+M=-7+11=4$

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(ⅰ) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ⅱ) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(ⅲ) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

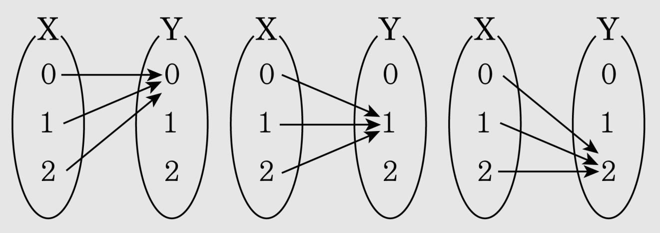
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

14. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

15. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

16. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)
$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$
$x = 0, 1, 2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

17. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

18. 일차 이하의 다항함수 $y=f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$ Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$ Ⅲ. $f(1)=1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

ㄱ $f(2)=1$ ㄴ $f(3)=3f(1)$

ㄷ $f(-1)>f(1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x)=1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.