

1. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,
부등식 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$ 가 항상 성립한다. $\square$ 안에 알맞은
최댓값은?
- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

a, b, c 가 모두 양수이므로
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$
따라서

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &\geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc} \\ &= \frac{8abc}{abc} = 8\end{aligned}$$

2. $x > 2$ 일 때, $x - 2 + \frac{4}{x-2}$ 의 최솟값은?

- ① 0 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

산술 기하평균의 관계에서

$$(x-2) + \frac{4}{(x-2)} \geq 2\sqrt{(x-2)\frac{4}{(x-2)}}$$

$$= 2\sqrt{4} = 4$$

∴ 최솟값 : 4

3. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

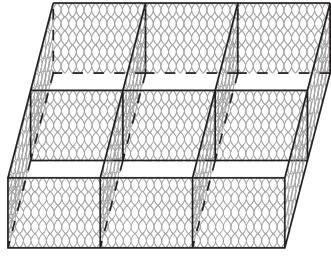
$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

4. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?

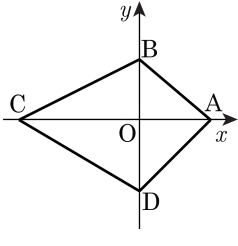


- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

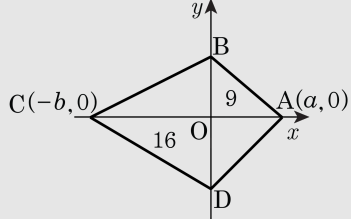
가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면
 $152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고
등호가 성립할 때, xy 가 최대가 된다.
 $3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로
 $6x = 152$
즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

5. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

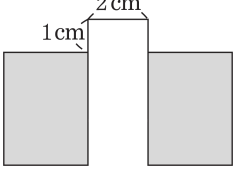
$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

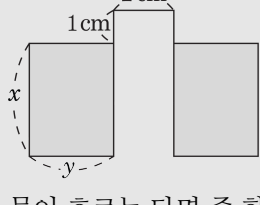
$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

6. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm^2 ② 1200 cm^2 ③ 1600 cm^2
 ④ 2000 cm^2 ⑤ 2400 cm^2

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 $y\text{ cm}$, 세로를 $x\text{ cm}$ 라고 하면

$$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200 \text{ 에서}$$

$$4x + 2y = 196, x > 0, y > 0 \text{ 이므로}$$

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

7. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,
 $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

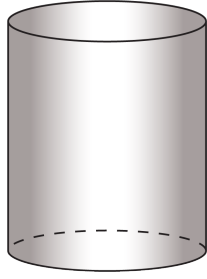
$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

8. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,
 부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 철판의 넓이를 S 라 하면
 $S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2\pi xy$
 $= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$
 $= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$
 단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,
 곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.
 따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

9. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
 $(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2$ ㉠ 0
이것을 t 에 관하여 정리하면
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t$
 $+ (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉡ 0
따라서 항상 성립하기 위해서는
 $(ax + by + cz + dw)^2 -$
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉢ 0..... (이하 생략)

- ① >, < ② ≥, < ③ ≤, > ④ ≤, ≥ ⑤ ≥, ≤

해설

생략

10. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

11. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

12. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (개)

13. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

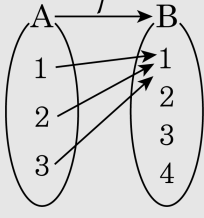
$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 와 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 A 에서 B 로의 함수의 개수를 a , 일대일 함수의 개수를 b , 상수함수의 개수를 c 라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 64
- ② 32
- ③ 128
- ④ 92
- ⑤ 48

해설

- (1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로
 $\therefore a = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- (2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로
 $\therefore b = 4 \times 3 \times 2 = 24$
- (3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로
 $\therefore c = 4$



$\therefore a + b + c = 92$

15. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

16. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

- ① 2 가지
- ② 3 가지
- ③ 6 가지
- ④ 8 가지
- ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{2}$

①, ②을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

- I. $f(1) = 3$
II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
 $f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
 $f(2), f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.

∴ 3 개

18. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

- ① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

19. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
 A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 $\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

- ① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)