

1.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,

부등식  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$  가 항상 성립한다.  $\square$  안에 알맞은  
최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 12

해설

$a, b, c$  가 모두 양수이므로

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &\geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc} \\ &= \frac{8abc}{abc} = 8 \end{aligned}$$

2.  $x > 2$  일 때,  $x - 2 + \frac{4}{x - 2}$  의 최솟값은?

① 0

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

산술 기하평균의 관계에서

$$(x - 2) + \frac{4}{(x - 2)} \geq 2 \sqrt{(x - 2) \frac{4}{(x - 2)}}$$

$$= 2\sqrt{4} = 4$$

∴ 최솟값 : 4

3. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

①  $\frac{25}{4}$

②  $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④  $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤  $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

#### 해설

밑변과 높이를 각각  $a, b$  라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

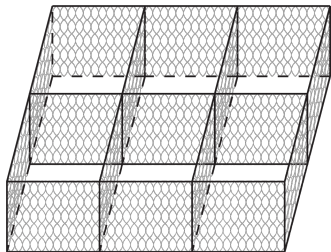
$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은  $\frac{25}{4}$  이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

둘레의 길이는  $5 + 5\sqrt{2}$

4. 동원이가 길이 152m 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?



- ① 19      ②  $\frac{68}{3}$       ③  $\frac{70}{3}$       ④ 24      ⑤  $\frac{76}{3}$

### 해설

가로의 길이를  $x$ , 세로의 길이를  $y$ 라 하면

$$152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy} \text{ 이고}$$

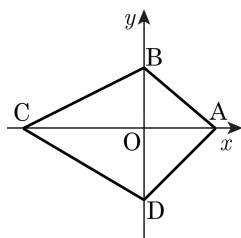
등호가 성립할 때,  $xy$ 가 최대가 된다.

$3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로

$$6x = 152$$

즉,  $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

5. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다.  $\triangle OAB$ 와  $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37

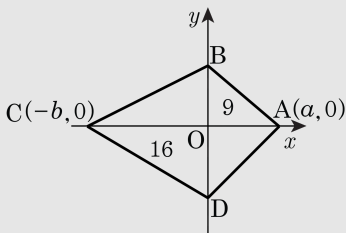
② 40

③ 43

④ 46

⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면,  $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$  이고,

$C(-b, 0)$ 이면  $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$  이다.

( $\because a > 0, b > 0$ )

( $\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

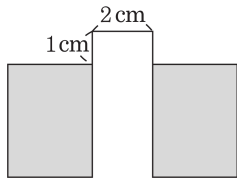
$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

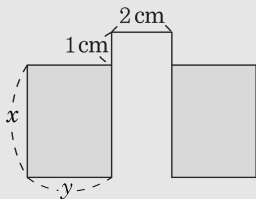
$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

6. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm<sup>2</sup>      ② 1200 cm<sup>2</sup>      ③ 1600 cm<sup>2</sup>  
 ④ 2000 cm<sup>2</sup>      ⑤ 2400 cm<sup>2</sup>

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를  $y$  cm, 세로를  $x$  cm 라고 하면

$$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200 \text{ 에서}$$

$$4x + 2y = 196, x > 0, y > 0 \text{ 이므로}$$

(산술평균)  $\geq$  (기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는  $2xy = 2401$

7.  $x < 0$ 인 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)$ 가  $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,  $f(x)$ 의 최댓값은?

①  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$   
④  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

②  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$   
⑤  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

### 해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \text{㉠}$$

$x$ 에  $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \text{㉡}$$

㉠  $\times 2 +$  ㉡ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

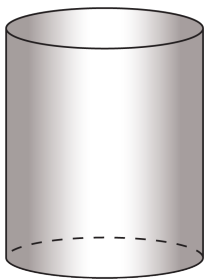
$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

8. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은  $1\text{m}^2$  당 1만원이다. 보일러의 부피가  $64\text{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원                      ② 104만원                      ③ 100만원  
 ④ 96만원                      ⑤ 90만원

### 해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를  $x$ , 높이를  $y$ 라 하면,

부피  $V$ 는  $V = \pi x^2 y = 64 \dots \dots \textcircled{7}$

철판의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$$

$$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$$

$$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$$

단, 등호는  $8x^2 = \frac{64}{x}$  일 때,

곧  $x = 2$  일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.



9. 다음은  $a, b, c, d, x, y, z, w$ 가 실수일 때, 부등식  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수  $t$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2 \quad \boxed{\text{㉠}} \quad 0$$

이것을  $t$ 에 관하여 정리하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉡}} \quad 0$$

따라서 항상 성립하기 위해서는

$$(ax + by + cz + dw)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉢}} \quad 0 \dots \dots (\text{이하 생략})$$

①  $>, <$

②  $\geq, <$

③  $\leq, >$

④  $\leq, \geq$

⑤  $\geq, \leq$

해설

생략

10. 제곱의 합이 일정한 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $a + 2b$ 가 최대일 때,  $a$ 와  $b$ 사이의 관계는?

①  $b = 2a$

②  $a = 2b$

③  $a = b$

④  $a^2 = b$

⑤  $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는  $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$  일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

11. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $A$ 로의 함수  $f$  중에서  $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

### 해설

역함수  $f^{-1}$ 가 존재하므로,  $f$ 는 일대일대응이다.

( i )  $f(1) = 1$  일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$  또는  $f(2) = 3, f(3) = 2$

( ii )  $f(1) = 2$  일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$  이므로  $f(3) = 3$

( iii )  $f(1) = 3$  일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$  이므로  $f(2) = 2$

( i ), ( ii ), ( iii )에서 함수  $f$ 의 개수는 4개이다.

12. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d\}$  에 대하여 집합  $X$  에서 집합  $Y$  로의 함수  $f : X \rightarrow Y$  의 개수는?

- ① 12 개      ② 27 개      ③ 36 개      ④ 64 개      ⑤ 81 개

해설

집합  $X$  의 원소  $-1, 0, 1$  에 대응될 수 있는  
집합  $Y$  의 원소가 각각 4 개씩이므로  
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

13. 이차함수  $f(x) = x^2 - 4x$  가 있다. 함수  $f : X \rightarrow X$  가 일대일대응이 되도록 하는 집합  $X$  를 구하면  $X = \{x \mid x \geq k\}$  이다. 이 때,  $k$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$k \geq 2$  라면  $x \geq k$  에서  $f(x)$  는 계속 증가하므로  
함수  $f : X \rightarrow X$  가 일대일 대응이 되려면

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

14. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$  와  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  에서  $A$  에서  $B$  로의 함수의 개수를  $a$ , 일대일 함수의 개수를  $b$ , 상수함수의 개수를  $c$  라 할 때,  $a + b + c$  의 값을 구하면?

① 64

② 32

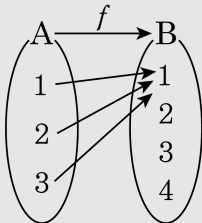
③ 128

④ 92

⑤ 48

### 해설

- (1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로  
 $\therefore a = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- (2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로  
 $\therefore b = 4 \times 3 \times 2 = 24$
- (3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로  
 $\therefore c = 4$



$$\therefore a + b + c = 92$$

15. 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$  에 대하여  $A$  에서  $A$  로의 함수  $f$  중  $f(x) = f(-x)$  를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는

-1 이 대응한 원소 1 가지

따라서, 주어진 조건을 만족시키는

함수  $f$  의 개수는  $3 \times 3 \times 1 = 9$  (개)

16. 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$  이라 할 때, 함수  $f : A \rightarrow A$  에 대하여  $f(-x) = -f(x)$  를 만족하는 함수  $f$  의 가지수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 6 가지

④ 8 가지

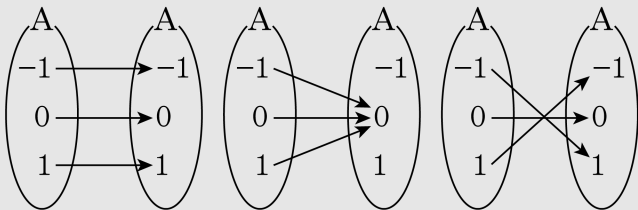
⑤ 9 가지

해설

$$f(-0) = -f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$



㉠, ㉡을 만족하는 함수  $f$  는 위의 3 가지뿐이다.



17. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수  $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I.  $f(1) = 3$

II.  $x \in A$ 에 대하여  $f(x)$ 의 최솟값은 2이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

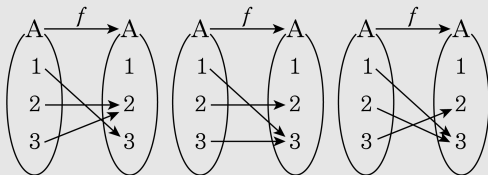
$f(2) = 2$  또는  $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수  $f$ 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$  3 개

18. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 집합  $B = \{a, b, c, d, e\}$  로의 일대일 대응  $f$  중  $f(1) = a, f(2) = b$  인  $f$  의 개수는?

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 12 개

⑤ 16 개

### 해설

$f(1) = a, f(2) = b$  이므로  $f: A \rightarrow B$  가 일대일 대응이려면

$f(3)$  의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$  의 값을 제외한 3 개,

$f(4)$  의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$  의 값을 제외한 2 개,

$f(5)$  의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3), f(4)$  의 값을 제외한 1 개이다.

따라서, 일대일 대응  $f$  의 개수는  $3 \times 2 \times 1 = 6$  개

19. 두 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  에서  $A$  의 모든 원소  $x$  에 대하여  $f(x) = f(x^2)$  으로 되는  $A$  에서  $B$  로의 함수  $f$  의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$  이므로

$A$  의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$A$  의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$  (가지)

20. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  일 때, 함수  $f: X \rightarrow X$  가  $X$  의 임의의 원소  $x$  에 대하여  $f(x) \leq x$  를 만족한다. 이 때, 함수  $f$  의 개수는?

① 16 개

② 20 개

③ 24 개

④ 28 개

⑤ 32 개

### 해설

$f(1)$  의 값이 될 수 있는 것은

1 의 1 개  $\Leftarrow f(1) \leq 1$

$f(2)$  의 값이 될 수 있는 것은

1, 2 의 2 개  $\Leftarrow f(2) \leq 2$

$f(3)$  의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3 의 3개  $\Leftarrow f(3) \leq 3$

$f(4)$  의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4 의 4개  $\Leftarrow f(4) \leq 4$

따라서, 구하는 함수  $f$  의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  (개)