1. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(x+\dfrac{9}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$xy + 1 + 9 + \dfrac{9}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{xy \cdot \dfrac{9}{xy}} + 10$

$= 2 \cdot 3 + 10 = 16$

2. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

> $\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots$ ㉠
> $\therefore\ \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
> $\therefore\ x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
> 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots$ ㉣

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는
$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $y=4x$일 때이고,
㉢ 에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서, $x+y$의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

3. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때,

부등식 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$가 항상 성립한다. $\square$ 안에 알맞은 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$a,\ b,\ c$ 가 모두 양수이므로

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$

따라서

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

4. 양의 실수 a, b에 대하여, $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)$이고,

a, b가 양의 실수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하면

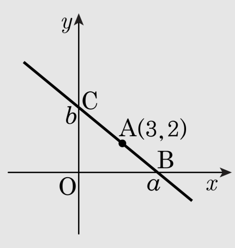
$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}+2\sqrt{b\times\frac{1}{b}}=4$

따라서 $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값은 4이다.(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

5. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, △OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ $2\sqrt{6}$

해설



△OBC 의 넓이를 S 라 하면 $S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$　$\therefore S\geq 12$

따라서 △OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

6. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$(k는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k)=k+1+\dfrac{1}{k-1}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

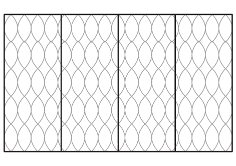
$\dfrac{D}{4}=1-k<0$이므로 $k-1>0$

$f(k)=2+(k-1)+\dfrac{1}{k-1}$

$\geq 2+2\sqrt{(k-1)\dfrac{1}{k-1}}=4$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 4이다.

7. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$　④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a + 5b = 60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

$\therefore\ ab \leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$이므로

$S = ab \leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

8. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$ ㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

9. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a^2+b^2=25$이고

$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$

$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고

$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

10. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원

④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

(총 비용) $= 250\left(\frac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$

11. $a > 1$일 때, $\dfrac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{1}{a-1} > 0$

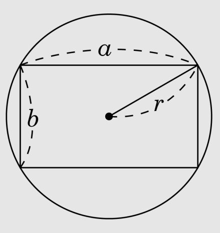
$4(a-1) + 1 + \dfrac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \dfrac{1}{(a-1)}} + 1$

$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$

12. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

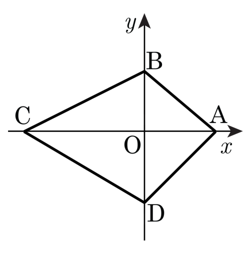
① $2r(\mathrm{cm}^2)$ ② $r^2(\mathrm{cm}^2)$ ③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$ ⑤ $\frac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



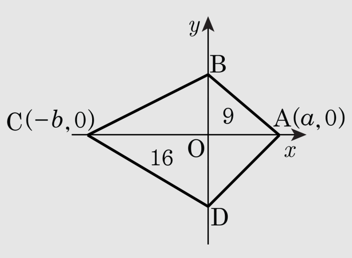
$a^2+b^2=(2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$

13. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　② 40　③ 43　④ 46　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \frac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\frac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a > 0,\ b > 0)$

(□ABCD의 넓이)

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

$= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$

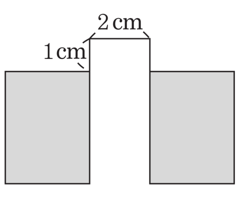
$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$

$a > 0,\ b > 0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$

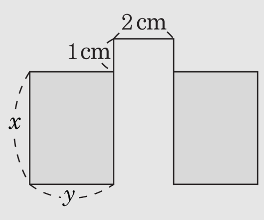
14. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,\mathrm{cm}^2$　② $1200\,\mathrm{cm}^2$　③ $1600\,\mathrm{cm}^2$

④ $2000\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $2400\,\mathrm{cm}^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$4x+2y+2+1\times 2=200$ 에서

$4x+2y=196x>0,\ y>0$ 이므로

(산술평균) ≥(기하평균) 에서

$$\frac{4x+2y}{2} \geq \sqrt{4x\cdot 2y}=2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{196}{2}$$

$$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy=2401$

15. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

16. a, b, x y가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

17. 실수 x, y, z에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

x, y, z가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

18. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

19. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \ge (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \ge 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \ge 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$y=\frac{1}{4}(5-3x)$

$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$

$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$

$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$

20. $a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면?

① $-4 \le ax+by \le 4$
② $-9 \le ax+by \le 9$
③ $-6 \le ax+by \le 6$
④ $0 \le ax+by \le 36$
⑤ $-36 \le ax+by \le 36$

해설

$a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$이면
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$에서
$4 \cdot 9 \ge (ax+by)^2$
$\therefore -6 \le ax+by \le 6$

21. a, b, c가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=4$일 때 $a+b+\sqrt{2}c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$\left\{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2\right\}(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+\sqrt{2}c)^2$

$\therefore\ (a+b+\sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$

$\therefore\ -4 \leq a+b+\sqrt{2}c \leq 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$\therefore\ M=4,\ m=-4$

$M-m=8$

22. $a,\ b,\ x,\ y$가 실수이고 $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=8$일 때, $ax+by$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
즉, $(ax+by)^2 \leq 2\times 8$
한편, $ax+by=X$라 하면, $X^2 \leq 16$
$\therefore -4 \leq X \leq 4$
따라서, $M=4,\ m=-4$
$\therefore M+m=0$

23. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ $\boxed{㉠}$ 0
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉠}$ 0
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉡}$ $0\cdots\cdots$(이하 생략)

① $>$, $<$ ② $\geq$, $<$ ③ $\leq$, $>$ ④ $\leq$, $\geq$ ⑤ $\geq$, $\leq$

해설

생략

24. 제곱의 합이 일정한 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$　　② $a=2b$　　③ $a=b$

④ $a^2=b$　　⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

25. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

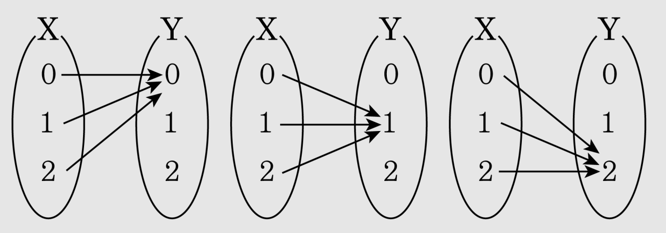
해설
두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여
X 에서 Y 로의 상수함수는
$f(x)=1,\ f(x)=2,\ f(3)=3$ 의 3 개가 있다.

26. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

27. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 6 개 ⑤ 9 개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii) 에서 함수 f 의 개수는 4 개이다.

28. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f:X\rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4\times4\times4=64$(개)

29. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 27　　② 30　　③ 33　　④ 36　　⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a=3\times3\times3=27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b=3\times2\times1=6$
$\therefore a+b=27+6=33$

30. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)
$=$(n 의 일의 자리수)
$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$

31. $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87　② 88　③ 105　④ 144　⑤ 267

해설

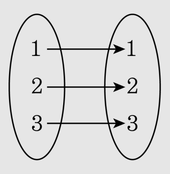
함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
$\therefore 4\times4\times4=64$ 가지
일대일 함수 : $a\neq b$ 이면 $f(a)\neq f(b)$ 이므로
a 가 선택 가능한 개수 : 4
b 가 선택 가능한 개수 : 3
c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
$\therefore\ 4\times3\times2=24$ 가지
$\therefore\ 64+24=88$

32. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대해 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수의 개수를 a, 상수함수의 개수를 b 라 할 때, $a + b$ 는 얼마인가?

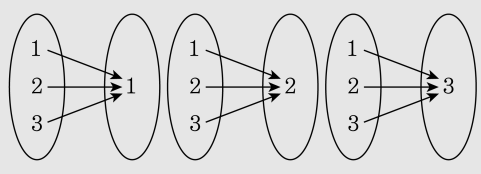
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

항등함수는 $1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3$ 의 한 가지가 있고,



상수함수의 경우는$(1, 2, 3) \to 1, (1, 2, 3) \to 2, (1, 2, 3) \to 3$ 의 3 가지가 있다.



$\therefore a + b = 4$

33. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$　　㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1,\ \ f(0) = 0,\ f(1) = 1$이므로
$f(x)$는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1,\ \ g(0) = 0,\ g(1) = 1$이므로
$g(x)$는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3,\ \ h(0) = 2,\ h(1) = 3$이므로
$h(x)$는 항등함수가 아니다.

34. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

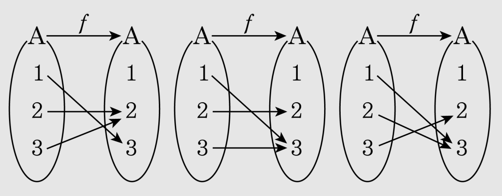
35. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$
Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

36. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a,\ f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개　② 6 개　③ 8 개　④ 12 개　⑤ 16 개

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 이므로 $f : A \to B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

37. 두 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

38. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이면
$f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ 이면
$f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1) \neq 0,\ f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

39. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)
그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x) \neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)

40. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개　② 20 개　③ 24 개　④ 28 개　⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \le 1$
$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \le 2$
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \le 3$
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \le 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)