

1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{9}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 16

② 14

③ 12

④ 10

⑤ 8

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$$xy + 1 + 9 + \frac{9}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{xy \cdot \frac{9}{xy}} + 10$$

$$= 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

2. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots \text{㉠}$$

$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \text{㉡}$$

$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \text{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다. ...㉣

① ㉠

② ㉡

③ ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{y}, \text{ 즉 } y = 4x \text{ 일 때이고,}$$

㉡ 에서 등호가 성립하는 경우는

$x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.

따라서, $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

3. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

부등식 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$ 가 항상 성립한다. $\square$ 안에 알맞은
최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 12

해설

a, b, c 가 모두 양수이므로

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &\geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc} \\ &= \frac{8abc}{abc} = 8 \end{aligned}$$

4. 양의 실수 a, b 에 대하여, $(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \text{ 이고,}$$

a, b 가 양의 실수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하면

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$$

따라서 $(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값은 4이다.(단, 등호는 $a = b = 1$ 일 때 성립)

5. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ $2\sqrt{6}$

해설

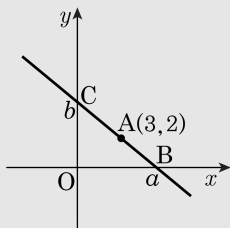
$\triangle OBC$ 의 넓이를

S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad A(3, 2)$$

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

로



$$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

6. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

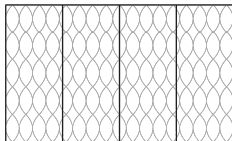
해설

$$\frac{D}{4} = 1 - k < 0 \text{ 이므로 } k - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 2 + (k - 1) + \frac{1}{k - 1} \\ &\geq 2 + 2\sqrt{(k - 1)\frac{1}{k - 1}} = 4 \end{aligned}$$

따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

7. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

8. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{7}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

9. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

둘레의 길이는 $5 + 5\sqrt{2}$

10. 길이가 10인 쇠파이프를 n 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원

② 7000 원

③ 8000 원

④ 9000 원

⑤ 10000 원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$

11. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

12. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\text{cm}^2)$

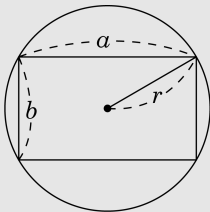
② $r^2(\text{cm}^2)$

③ $2r^2(\text{cm}^2)$

④ $\sqrt{2}r^2(\text{cm}^2)$

⑤ $\frac{r^2}{2}(\text{cm}^2)$

해설



$$a^2 + b^2 = (2r)^2$$

산술기하평균의 관계에 의해

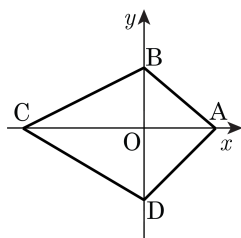
$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$$

$$4r^2 \geq 2(ab)$$

$$ab \leq 2r^2,$$

$$(\text{직사각형 넓이의 최댓값}) = 2r^2$$

13. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37

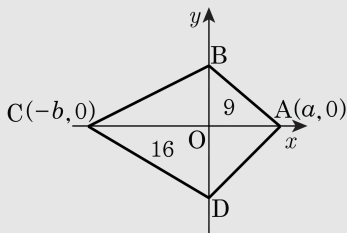
② 40

③ 43

④ 46

⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

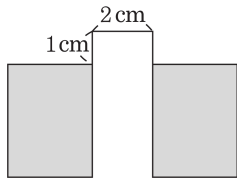
$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

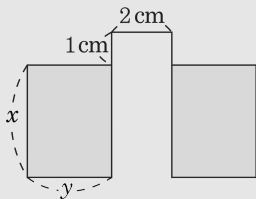
$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

14. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm² ② 1200 cm² ③ 1600 cm²
 ④ 2000 cm² ⑤ 2400 cm²

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200 \text{ 에서}$$

$$4x + 2y = 196, x > 0, y > 0 \text{ 이므로}$$

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

15. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$$

$$\therefore M = 6, m = -6$$

16. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$$

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = -16$$

17. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x - y + 4z)^2$$

$$18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

18. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$5 \times 3 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$$

따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

19. 실수 x, y 에 대하여 $3x + 4y = 5$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 6

⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$$

$$25(x^2 + y^2) \geq 25$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 1$$

해설

$3x + 4y = 5$ 에서

$$y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{16}(3x - 5)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{16}(9x^2 - 30x + 25)$$

$$= \frac{25}{16}x^2 - \frac{30}{16}x + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{25}{16} \left(x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right) + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{25}{16} \left(x - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$$

$$= \frac{25}{16} \left(x - \frac{3}{5} \right)^2 + 1$$

20. $a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $ax + by$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \leq ax + by \leq 4$

② $-9 \leq ax + by \leq 9$

③ $-6 \leq ax + by \leq 6$

④ $0 \leq ax + by \leq 36$

⑤ $-36 \leq ax + by \leq 36$

해설

$a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 이면

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에서

$4 \cdot 9 \geq (ax + by)^2$

$\therefore -6 \leq ax + by \leq 6$

21. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

22. a, b, x, y 가 실수이고 $a^2 + b^2 = 2, x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\text{즉, } (ax + by)^2 \leq 2 \times 8$$

한편, $ax + by = X$ 라 하면, $X^2 \leq 16$

$$\therefore -4 \leq X \leq 4$$

따라서, $M = 4, m = -4$

$$\therefore M + m = 0$$

23. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2 \quad \boxed{\text{㉠}} \quad 0$$

이것을 t 에 관하여 정리하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉡}} \quad 0$$

따라서 항상 성립하기 위해서는

$$(ax + by + cz + dw)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉢}} \quad 0 \dots \dots (\text{이하 생략})$$

① $>, <$

② $\geq, <$

③ $\leq, >$

④ $\leq, \geq$

⑤ $\geq, \leq$

해설

생략

24. 제공의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

25. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여
 X 에서 Y 로의 상수함수는

$f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

26. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3

② 6

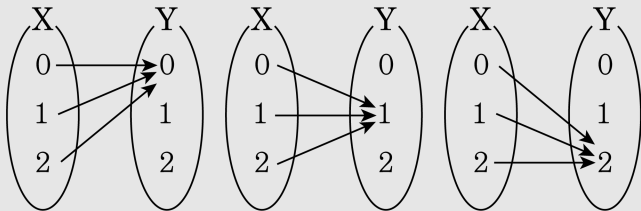
③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

27. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

28. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- ① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

29. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

30. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

31. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87

② 88

③ 105

④ 144

⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.

그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.

$$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ 가지}$$

일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로

a 가 선택 가능한 개수 : 4

b 가 선택 가능한 개수 : 3

c 가 선택 가능한 개수 : 2

이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.

$$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ 가지}$$

$$\therefore 64 + 24 = 88$$

32. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대해 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수의 개수를 a , 상수함수의 개수를 b 라 할 때, $a + b$ 는 얼마인가?

① 1

② 2

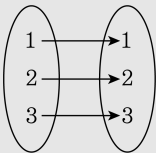
③ 3

④ 4

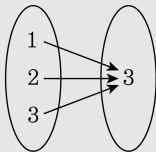
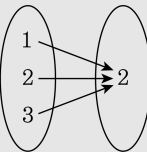
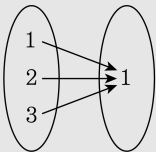
⑤ 5

해설

항등함수는 $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$ 의 한 가지가 있고,



상수함수의 경우는 $(1, 2, 3) \rightarrow 1, (1, 2, 3) \rightarrow 2, (1, 2, 3) \rightarrow 3$ 의 3가지가 있다.



$$\therefore a + b = 4$$

33. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중
항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$

㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로
 $f(x)$ 는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1, g(0) = 0, g(1) = 1$ 이므로
 $g(x)$ 는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3, h(0) = 2, h(1) = 3$ 이므로
 $h(x)$ 는 항등함수가 아니다.

34. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

35. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$

II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

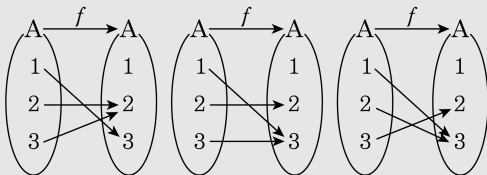
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1 에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

36. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 12 개

⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이려면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

37. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

38. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

39. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개

② 18 개

③ 20 개

④ 24 개

⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

40. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개

② 20 개

③ 24 개

④ 28 개

⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$

따라서, 구하는 함수 f 의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)