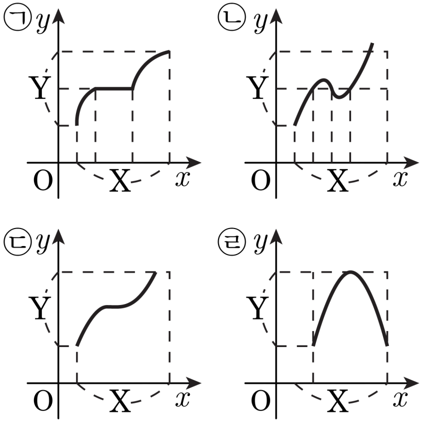
1. 함수 $f: X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

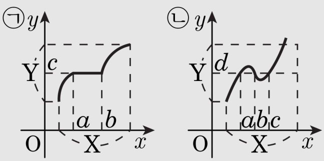


① (ㄱ) (ㄷ)　　② (ㄴ) (ㄹ)　　③ (ㄷ)

④ (ㄱ)　　⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X에서 Y로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는 x의 상이 모두 c이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ $a,\ b,\ c$의 상이 모두 d이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣, ㉡의 경우와 같다.

2. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

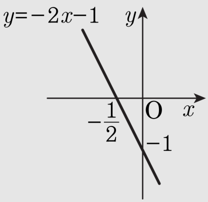
① $y=-x^2$ ② $y=-|x|$

③ $y=3$ ④ $y=-2x-1$

⑤ $y=\sqrt{2}x-2\ (x\geq 1)$

해설

① $-1\neq 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=-1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



또, $f(X)\leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
② $-1\neq 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=-1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X)\leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
③ 모든 $x\in X$ 에 대하여 $f(x)=3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X)=3$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합)이므로
일대일대응이다.
⑤$x\geq 1$ 일 때, $f(X)\geq 0$ 이므로
일대일 함수이지만 (공역)$\neq$ (치역)이다.

3. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$	㉡ $g(x) = x^2$
㉢ $h(x) = -x$	㉣ $k(x) = \|x\|$

① 4 개 ② 3 개 ③ 2 개 ④ 1 개 ⑤ 없다

해설

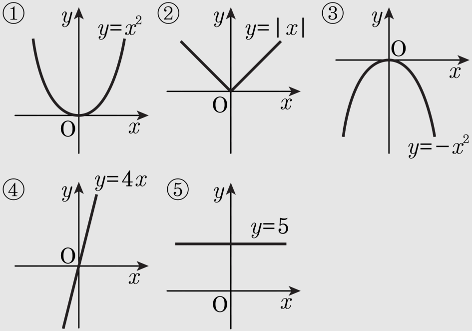
이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

4. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$ ② $f(x) = |x|$ ③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$ ⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의

각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

5. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+5 \geq k$ 이다.' 는 참이고 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-5 \leq k < -2$ ② $-5 < k \leq -2$ ③ $-2 \leq k < 2$

④ $2 < k \leq 5$ ⑤ $2 \leq k < 5$

해설

부등식 $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k \leq 5 \cdots$ ㉠

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 가 거짓이므로 그 부정인 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+k > 2$ 이다.' 는 참이다.

따라서, $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k > 2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 구하는 k 의 값의 범위는 $2 < k \leq 5$

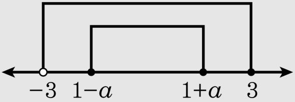
6. 명제 '$|x-1| \le a$이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a의 값의 범위는? (단, x, y는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \le 2$ ② $0 < a < 2$ ③ $0 < a \le 4$

④ $0 < a < 4$ ⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \le a$에서 $-a \le x-1 \le a$ ∴ $1-a \le x \le 1+a$ $|x| < 3$에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3$ ∴ $a < 4$ 그리고 $a < 2$

∴ $a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

7. 명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되려면 $2^2-2a+6=0$ 을 만족해야 한다.

$2^2-2a+6=0$, $2a=10$

$\therefore a=5$

8. 명제 '$|x-3|<a$ 이면 $1<x<7$이다.' 가 참이 되기 위한 양수 a의 최댓값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$-a<x-3<a \Rightarrow 3-a<x<3+a$

$\{x|3-a<x<3+a\} \subset \{x|1<x<7\}$

$\therefore 1 \le 3-a$과 $3+a \le 7$을 동시에 만족해야 한다.

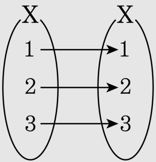
$\therefore a \le 2$

9. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$
즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



10. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \dfrac{100x + 200}{f(x)}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$

$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2(\because\ k > 0)$

$\therefore\ (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2)$

$$= \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$

11. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=(f \circ f)^{-1}(x)=1$

$(f \circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

12. 두 일차함수가 $f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2)=3$, $(g\circ f)(x)=3x-2$ 를 만족하는 a 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 에서
$g^{-1}(2)=3$ 이면 $g(3)=2$ 이므로
$3b+c=2\cdots$ ㉠
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=b(ax+2)+c$$
$$=abx+2b+c=3x-2$$
$\therefore\ ab=3\cdots$ ㉡
$2b+c=-2\cdots$ ㉢
㉠ − ㉢ 하면
$b=4,\ c=-10,\ a=\frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2)=3 \Leftrightarrow g(3)=2$
$(g\circ f)(x)=3x-2 \Leftrightarrow g(f(x))=3x-2$
$f(x)=ax+2$ 에서 $f(k)=ak+2=3\cdots$ ㉠ 이라 하면
$g(3)=g(f(k))=3k-2=2$, $k=\frac{4}{3}$
㉠ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a+2=3$
$\therefore\ a=\frac{3}{4}$