**1.** $n$ 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

| |
|---|
| '$n^2$ 이 12의 배수이면 $n$ 은 12의 배수이다.' |

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 $n^2$ 이 12의 배수이면서 $n$ 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, $n$ 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6\times1,\ 6\times3,\ 6\times5,\ 6\times7,\ 6\times9,\ 6\times11,\ 6\times13,\ 6\times15\}$

**2.** 전체집합 U에 대하여 두 조건 $p$, $q$ 의 진리집합을 각각 $P$, $Q$ 라 하고, 명제 '$p$ 이면 $q$ 이다.' 가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P-Q$ ② $Q-P$ ③ $P\cap Q$

④ $P^c\cap Q^c$ ⑤ $Q\cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 $p$ 는 만족하지만 조건 $q$ 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 $x$ 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P-Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

**3.** 다음 중 명제 '$x, y$ 가 유리수이면 $xy$ 는 유리수이다.'의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0, y = 2$ ② $x = 1, y = 2$

③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ ④ $x = 1, y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

해설

'$x, y$ 가 유리수이면 $xy$ 는 유리수이다.'의 이는 '$x$또는$y$ 가 유리수가 아니면 $xy$ 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

**4.** 전체집합 $U$에 대하여 두 조건 $p$, $q$를 만족하는 집합을 각각 $P, Q$라 할 때, $p \nRightarrow q$에 해당하는 사례들이 속하는 집합은?

① $P^c \cup Q$　② $P \cup Q^c$　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　⑤ $P \cap Q^c$

해설

주어진 명제가 거짓이 되는 반례들이 속하는 집합으로 $P - Q = P \cap Q^c$

**5.** 네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$ 에 대하여 $p$ 는 $q$ 이기 위한 필요조건, $q$ 는 $r$ 이기 위한 필요조건, $q$ 는 $s$ 이기 위한 충분조건, $r$ 는 $s$ 이기 위한 필요조건이다. 이때, $p$ 는 $s$ 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p$ 는 $q$ 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$q$ 는 $r$ 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

$q$ 는 $s$ 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

$r$ 는 $s$ 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 $s$ 이기 위한 필요조건이다.

**6.** 전체집합 $U$ 의 두 부분집합 $A$, $B$ 에 대하여 $A-(A-B)=A$ 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $A \subset B$　② $A^c \subset B^c$　③ $A-B=\varnothing$

④ $A \cup B = B$　⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A-(A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$\therefore$ $A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$

**7.** 네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$ 에 대하여 $p$ 는 $q$ 이기 위한 필요조건, $r$은 $q$ 이기 위한 충분조건, $s$ 는 $r$ 이기 위한 충분조건, $q$ 는 $s$ 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① $r$은 $p$이기 위한 충분조건

② $s$는 $r$이기 위한 필요충분조건

③ $r$은 $q$이기 위한 필요충분조건

④ $s$는 $p$ 이기 위한 필요조건

⑤ $s$는 $q$이기 위한 필요충분조건

해설

① $r \rightarrow p$

② $s \leftrightarrow r$, $r \leftrightarrow s$

③ $r \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$

④ $s \rightarrow p$

⑤ $s \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow s$

**8.** 두 명제 $p \to q$ 와 $q \to r$ 가 모두 참이면 명제 $p \to r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

> 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 $p$ 는 $r$ 이기 위한 충분조건, $q$ 는 $r$ 이기 위한 충분조건, $s$ 는 $r$ 이기 위한 필요조건, $q$ 는 $s$ 이기 위한 필요조건이다.

이 때, $p$ 는 $q$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\quad\quad}$ 조건

◁ 정답 : 충분조건

해설

$p \to r,\ q \to r,\ r \to s,\ s \to q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.

$\therefore p$ 는 $q$ 이기 위한 충분조건이다.

**9.** 다음 중 모든 실수 $x$에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $-x^2+4x-6<0$

㉡ $x^2-6x+9>0$

㉢ $x^2-2x+4\geq 0$

㉣ $a=b<0$이고, $ax-b>bx+a$ (단, $a$, $b$는 실수)

㉤ $a=b\leq 0$이고, $ax-b>bx+a$ (단, $a$, $b$는 실수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$

㉢ $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$

㉤ $a=b\leq 0$이고, $ax-b\geq bx+a$

**10.** 다음 [보기]중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, $a, b, c$ 는 실수)

보기

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

㉣ $|a| + |b| > |a + b|$

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉤ ② ㉡, ㉣, ㉠ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 $b^2$ 을 곱하면

$a < c$ $(\because b^2 > 0)$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ : 틀림

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

**11.** 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 $a$의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로
$a^2+2a+1-4a-4$
$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서 정수 $a$의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 5개

**12.** 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, $x$, $y$ 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. ∴ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ ∴ 거짓

㉢ [반례] $x = 0$, $y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ ∴ 거짓