1. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때,

부등식 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq$ □가 항상 성립한다. □ 안에 알맞은 최댓값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 12

해설

$a,\ b,\ c$ 가 모두 양수이므로

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$

따라서

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}$$

$$= \frac{8abc}{abc} = 8$$

2. 양의 실수 x, y에 대하여 $2x+y=1$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$x>0, y>0$ 이므로 $2x+y=1\geq 2\sqrt{2xy}$

$\frac{1}{2}\geq\sqrt{2xy}$

$\therefore \frac{1}{8}\geq xy$

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}}$ 이므로

$\frac{3}{xy}$ 이 최소가 되려면 xy가 최대가 되어야 하므로 $xy=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{3}{y}\geq 2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$

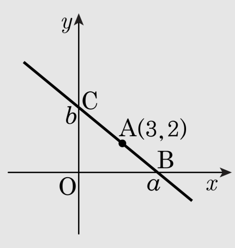
3. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, △OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

△OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$ $\quad\therefore S\geq 12$

따라서 △OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

4. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$(k는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k)=k+1+\frac{1}{k-1}$의 최솟값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$\frac{D}{4}=1-k<0$이므로 $k-1>0$

$$f(k)=2+(k-1)+\frac{1}{k-1}$$
$$\geq 2+2\sqrt{(k-1)\frac{1}{k-1}}=4$$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 4이다.

5. 빗변의 길이가 5 인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　　② $5+5\sqrt{2}$　　③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$ 라 하면

$a^2+b^2=25$ 이고

$a^2+b^2 \ge 2ab$ 에서 $25 \ge 2ab$

$\therefore \frac{1}{2}ab \le \frac{25}{4}$ 이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

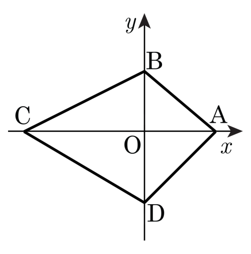
6. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

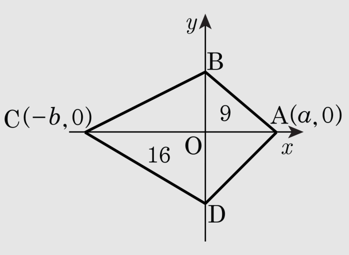
밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$ ㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

7. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

($\square$ABCD의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

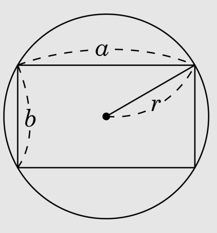
산술기하평균을 이용하면,

$\square\mathrm{ABCD} \geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

8. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\mathrm{cm}^2)$ ② $r^2(\mathrm{cm}^2)$ ③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$ ⑤ $\frac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



$a^2 + b^2 = (2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $= 2r^2$

9. $x < 0$ 인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2 +$ ㉡ 하면

$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2+2}{x}$

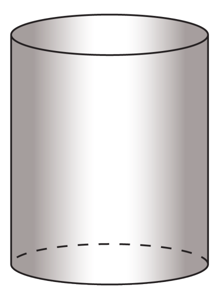
$\therefore f(x) = \frac{x^2+2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$

$x < 0$ 이므로

$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$ 의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원　② 104만원　③ 100만원
④ 96만원　⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를
x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$
$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$
$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$
단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

11. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

12. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \to Y$ 의 개수는?

① 12 개　② 27 개　③ 36 개　④ 64 개　⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

13. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x) \geq x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$

$\Rightarrow x \leq 0,\ x \geq 5$

$x \geq k$ 이므로 $k = 5$

14. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합$B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 일대일 대응 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$f : A \to B$ 가 일대일대응이려면 3 은 a_3, a_4, a_5 중 하나의 원소와 대응하고, 4 는 나머지 두 가지 원소중의 하나와 대응하여야 한다. 또 5 는 3, 4 가 대응하고 남은 원소와 대응하게 되므로 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$

15. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개　② 6 개　③ 7 개　④ 8 개　⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

16. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a,\ f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개　② 6 개　③ 8 개　④ 12 개　⑤ 16 개

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 이므로 $f : A \to B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

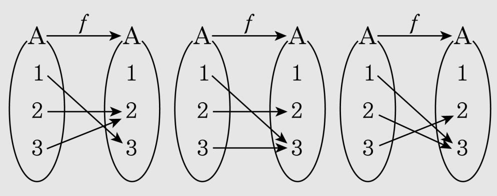
17. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$
Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

18. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x)=3x^2$, $g(x)=x^3+2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x)=g(x)$ 일 때, $f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면,
$(h(x)$ 의 근의 개수$)=($집합 X 의 개수$)$
$x^3+2x-3x^2=0$
$x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)=0$
$x=0,1,2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3-1=7$(개)

19. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　　② 20 개　　③ 25 개　　④ 27 개　　⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

20. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개　② 20 개　③ 24 개　④ 28 개　⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \le 1$
$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \le 2$
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \le 3$
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \le 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

21. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x)\neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4\times3\times2=24$ (가지)
그런데 $f(3)=3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x)\neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24-6=18$ (가지)

22. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이면
$f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ 이면
$f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1) \neq 0,\ f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)