

1. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

부등식 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$ 가 항상 성립한다. $\square$ 안에 알맞은
최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 12

해설

a, b, c 가 모두 양수이므로

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &\geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc} \\ &= \frac{8abc}{abc} = 8 \end{aligned}$$

2. 양의 실수 x, y 에 대하여 $2x+y=1$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$

② $3\sqrt{6}$

③ $4\sqrt{6}$

④ $5\sqrt{6}$

⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$$x > 0, y > 0 \text{ 이므로 } 2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{xy} \text{ 이 최소가 되려면 } xy \text{ 가 최대가 되어야 하므로 } xy = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

3. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6

② 8

③ 10

④ 12

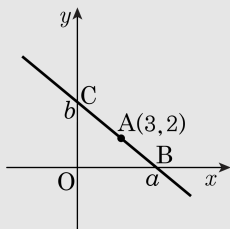
⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad A(3, 2)$$

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로



$$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

4. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\frac{D}{4} = 1 - k < 0 \text{ 이므로 } k - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 2 + (k - 1) + \frac{1}{k - 1} \\ &\geq 2 + 2\sqrt{(k - 1)\frac{1}{k - 1}} = 4 \end{aligned}$$

따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

5. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

둘레의 길이는 $5 + 5\sqrt{2}$

6. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{7}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

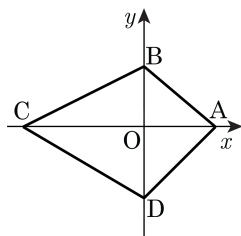
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

7. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37

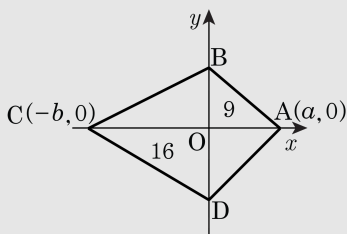
② 40

③ 43

④ 46

⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

8. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\text{cm}^2)$

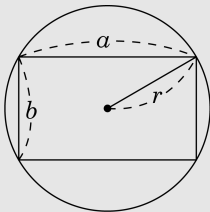
② $r^2(\text{cm}^2)$

③ $2r^2(\text{cm}^2)$

④ $\sqrt{2}r^2(\text{cm}^2)$

⑤ $\frac{r^2}{2}(\text{cm}^2)$

해설



$$a^2 + b^2 = (2r)^2$$

산술기하평균의 관계에 의해

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$$

$$4r^2 \geq 2(ab)$$

$$ab \leq 2r^2,$$

$$(\text{직사각형 넓이의 최댓값}) = 2r^2$$

9. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때, $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \text{㉠}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \text{㉡}$$

㉠ $\times 2 +$ ㉡ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

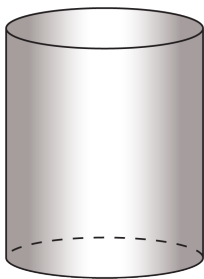
$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

10. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,

부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \dots \dots \textcircled{7}$

철판의 넓이를 S 라 하면

$$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$$

$$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$$

$$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$$

단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,

곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

11. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

12. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- ① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

13. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 일대일 대응 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f : A \rightarrow B$ 가 일대일대응이라면 3 은 a_3, a_4, a_5 중 하나의 원소와 대응하고, 4 는 나머지 두 가지 원소중의 하나와 대응하여야 한다. 또 5 는 3, 4 가 대응하고 남은 원소와 대응하게 되므로 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$

15. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는

-1 이 대응한 원소 1 가지

따라서, 주어진 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 12 개

⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이려면

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.

따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

17. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$

II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

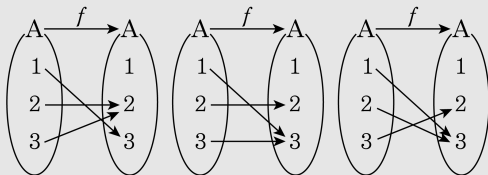
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

18. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

① 1 개

② 3 개

③ 4 개

④ 7 개

⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$

19. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개

② 20 개

③ 24 개

④ 28 개

⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$

따라서, 구하는 함수 f 의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

21. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개

② 18 개

③ 20 개

④ 24 개

⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

22. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)