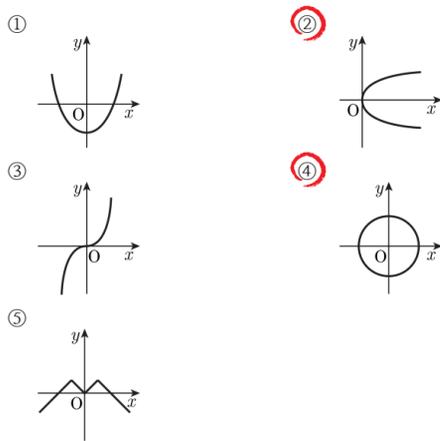


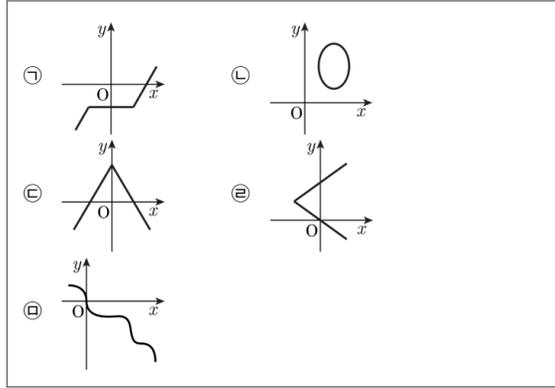
1. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x 의 값에 대응되는 y 가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x 축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X 에서 Y 로의 함수)

2. 다음 그래프 중 함수인 것은?

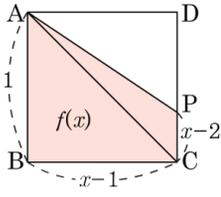


- ① ㉠, ㉡, ㉢
 ② ㉠, ㉢, ㉣
 ③ ㉠, ㉢, ㉤
 ④ ㉡, ㉢, ㉤
 ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
 ㉡ 함수가 아니다.
 ㉢ 함수
 ㉣ 함수가 아니다.
 ㉤ 함수
 따라서 ㉠, ㉢, ㉣만이 함수이다.

3. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

4. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나, 정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다. x, y 전체 실수 구간에서 그래프가 그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

6. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

- ① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로
일대일 대응이 되려면
 $x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
 $x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
 $\therefore a = 7$

7. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x+a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

8. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

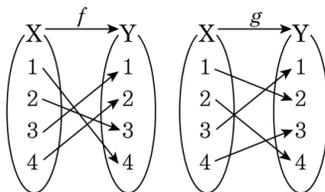
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

9. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$\begin{aligned} \therefore g \cdot f^{-1} &= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1}) \\ &= h \cdot I = h \end{aligned}$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

$$\therefore g(4) = 3$$

10. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$h(x) = ax + b \text{ 라고 놓고}$$

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ = -8ax - 8b - 2 + 3 \\ = 4x + 1$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

11. 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$)

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$f(-1) = \frac{1}{2}, f^2(-1) = 2, f^3(-1) = -1, f^4(-1) = \frac{1}{2} \dots$$

주기가 3 으로 반복되므로

$$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$$

12. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f: x \rightarrow x+1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

- ① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x+1) + 1 = x+2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x+2) + 1 = x+3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x+3) + 1 = x+4$$

⋮

이상에서 $f^n(x) = x+n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x+2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2+2006 = 2008$$

13. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하는 것을 모두 고르면?

보기

- I. $f(x) = x$
 II. $f(x) = -x + 5$
 III. $f(x) = -\frac{x-2}{3} + 2$
 IV. $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

- ① I, II, III ② I, II, IV ③ I, III, IV
 ④ II, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$f(x)$ 를 $y = x$ 에 대칭해도 $f(x)$ 가 되면

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

I. $f(x) = f^{-1}(x)$

II. $y = -x + 5 \Rightarrow x = -y + 5 \Rightarrow y = -x + 5$

III. $y = \frac{-3}{x-2} + 2 \Rightarrow x = \frac{-3}{y-2} + 2$
 $\Rightarrow y = \frac{-3}{x-2} + 2$

IV. $y = \frac{x+4}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{y+4}{2y-1} \Rightarrow y = \frac{x+4}{2x-1}$

\therefore I, II, III, IV : $f(x) = f^{-1}(x)$

14. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$
여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로
 $ab = 1$

15. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다. (단, $X \neq Y$)

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

16. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
 ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
 ㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣
 ④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

- ㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.
 \therefore 옳지 않다.
 ㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.
 \therefore 옳다.
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
 \therefore 옳지 않다.
 ㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
 $f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
 $\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

17. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

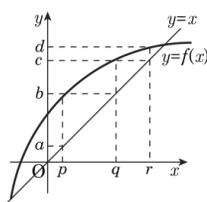
$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

18. 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ (f \circ f^{-1}))(d)$ 의 값은?

- ① 0 ② a ③ b
 ④ c ⑤ d



해설

$$\begin{aligned}
 r = c, q = b, p = a \text{ 이므로} \\
 (f \circ (f \circ f^{-1}))(d) &= (f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(d) \\
 &= f^{-1}(d) = r = c
 \end{aligned}$$

19. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$-1 \leq x < 0 \text{ 일 때, } [x] = -1 \quad \therefore y = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \text{ 일 때, } [x] = 0 \quad \therefore y = x$$

$$1 \leq x < 2 \text{ 일 때, } [x] = 1 \quad \therefore y = x - 1$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } [x] = 2 \quad \therefore y = 0$$

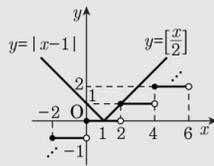
따라서, $y = x - [x]$ ($-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

20. 두 함수 $y = |x - 1|$, $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

21. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}}$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

해설

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{x+2}} = 1 + \frac{x+2}{2x+3}
 \end{aligned}$$

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 을 대입하면

$$1 + \frac{x+2}{2x+3} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

22. 분수식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}}$ 을 간단히 하면?

- ① $-a$ ② a ③ $a-1$
④ $1-a$ ⑤ $2a-1$

해설

밑에서부터 계산해 올라간다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{a+1}{a+1}}} = \frac{1}{1 - \frac{a+1}{a}} \\ &= \frac{1}{\frac{-1}{a}} = -a \end{aligned}$$

23. $\frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + xy + y^2} = 2$ 일 때, $\frac{3(x-y)}{x+y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① $2\sqrt{6} + 3$

② $2\sqrt{6} - 3$

③ $3 - 2\sqrt{6}$

④ $3 + 2\sqrt{6}$

⑤ $5 - 6\sqrt{2}$

해설

$$3x^2 - 2xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

$\therefore x^2 - 4xy - 2y^2 = 0$ 이 식의 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$\therefore \frac{x}{y} = 2 + \sqrt{6}$ ($\because x > y > 0$ 에서 $\frac{x}{y} > 1$)

$$\therefore \frac{3(x-y)}{x+y} = \frac{3\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{\frac{x}{y} + 1} = 2\sqrt{6} - 3$$

24. $abc = 1$ 일 때,

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \text{ 의 값은?}$$

- ㉠ 1 ㉡ 2 ㉢ $\frac{1}{2}$ ㉣ $\frac{2}{3}$ ㉤ 3

해설

$$abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a} \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{\frac{1}{a}+b+1} + \frac{c}{ca+c+abc}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{c}{c(a+1+ab)}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{1}{ab+a+1}$$

$$= \frac{ab+a+1}{ab+a+1} = 1$$

25. 톱니의 개수가 각각 x, y, z 개인 기어 A, B, C가 그림과 같이 물려 돌아가고 있을 때, A, B, C의 각 속도의 비는?



- ① $x : y : z$ ② $z : y : x$ ③ $y : z : x$
 ④ $yz : xz : xy$ ⑤ $xz : yx : zy$

해설

일정한 시간에 물려 돌아간 톱니의 개수는 같다. 톱니의 개수가 많을수록 회전 속도 즉, 각 속도는 느리다. 따라서 톱니의 개수와 각 속도는 반비례한다.

$$\therefore \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = yz : xz : xy$$

26. 한 변의 길이가 a 인 정삼각형과 반지름의 길이가 b 인 원의 넓이가 같을 때, $a^4 : b^4$ 의 값은?

① $8\pi^2 : 3$

② $8\pi^2 : 5$

③ $4\pi^2 : 1$

④ $12\pi^2 : 5$

⑤ $16\pi^2 : 3$

해설

정삼각형과 원의 넓이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, πb^2 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi b^2, a^2 : b^2 = 4\pi : \sqrt{3}$$

$$\therefore a^4 : b^4 = 16\pi^2 : 3$$

27. 다음 보기 중 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{x}{x+1}$ ㉡ $y = \frac{2-x}{x-1}$ ㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이다.

$$\text{㉠ } y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$$

$$\text{㉡ } y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$$

$$\text{㉢ } y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$$

따라서, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

28. 함수 $y = \frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$y = \frac{-2x+1}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{-3}{x-2} - 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$$k = -3, a = 2, b = -2$$

$$\therefore k+a+b = -3+2-2 = -3$$

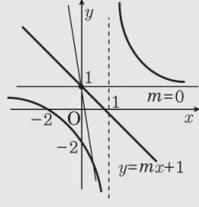
29. 분수함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < m \leq 12$ ② $-12 \leq m < 0$ ③ $-12 < m \leq 0$
 ④ $0 \leq m < 12$ ⑤ $-12 \leq m \leq 12$

해설

$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m = 0$ 일 때 두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y = \frac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1$$

$$\text{즉, } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이때, 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 12m < 0, m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는 $-12 < m \leq 0$

30. 두 함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$, $y = m(x-1) + 1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

분수함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$ 의 그래프는

점근선이 $x = 1$, $y = 1$ 이고,
점 $(0, 0)$ 을 지난다.

$y = m(x-1) + 1$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한
실수 m 의 값의 범위는

다음 그림에서 $m > 0$ 이다.

따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은
⑤이다.

