

1. 다음 보기는 제주도의 숙박시설들의 모임이다. 호텔의 모임을 A , 콘도의 모임을 B , 펜션의 모임을 C 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

호텔 : 으뜸 호텔, 오떼 호텔

콘도 : 카나 콘도, 자연 파크 리조트

펜션 : 지중해 펜션, 삼다도 펜션, 차구도 펜션, 월령 코지

① 오떼 호텔 $\in A$

② 카나 콘도 $\notin A$

③ 으뜸 호텔 $\notin A$

④ 삼다도 펜션 $\in C$

⑤ 월령 코지 $\notin B$

해설

으뜸 호텔 $\in A$

2. 다음 중에서 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 과 같은 집합을 모두 고른 것은?

㉠ $\{2n \mid 0 < n < 5 \text{인 정수}\}$

㉡ $\{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$

㉢ $\{2x - 2 \mid x \text{는 } 1 < x \leq 5 \text{인 정수}\}$

㉤ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉤

해설

㉠ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.

㉡ 2, 4, 6, 8, 10, ... 이므로 불가능하다.

㉢ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.

㉤ 1, 2, 4, 8이므로 불가능하다.

3. 다음 중 공집합인 것은?

① $\{x|x-5=3, x\text{는 짝수}\}$

② $\{x|x\text{는 } x \times 0 = 0\text{인 자연수}\}$

③ $\{x|x < 1\text{인 자연수}\}$

④ $\{x|x\text{는 } 2\text{의 약수}\}$

⑤ $\{x|-1 < x < 1, x\text{는 정수}\}$

해설

③ 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합

4. 다음 중 집합 $A = \{4, 8, 16\}$ 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\emptyset$

② A

③ $\{8\}$

④ $\{4, 8, 12, 16\}$

⑤ $\{8, 16\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면 $\emptyset, \{4\}, \{8\}, \{16\}, \{4, 8\}, \{4, 16\}, \{8, 16\}, \{4, 8, 16\}$ 이다.

5. 세 집합 사이에 $\{1, 2\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 가 될 수 없는 것은?

① $\{1, 2\}$

② $\{1, 2, 3\}$

③ $\{1, 2, 4\}$

④ $\{2, 3, 4\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

④ $\{1, 2\} \not\subset \{2, 3, 4\}$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{5, 8, 9, 13\}$, $A \cap B = \{5, 9\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 의 원소가 아닌 것은?

① 2

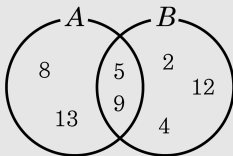
② 4

③ 5

④ 8

⑤ 9

해설



$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 원소 5와 9는 집합 B 에도 속한다.

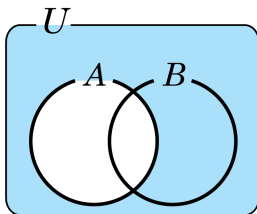
$5 \in B$, $9 \in B$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$ 의 원소에서 집합 A 의 원소들을 빼고 난 나머지는,

집합 B 에서 교집합에 속하는 원소들을 뺀 나머지 원소들이다.
따라서 2, 4, 12는 집합 B 에 속한다.

$2 \in B$, $4 \in B$, $12 \in B$

7. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{20, 30, 50\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 집합과 원소나열법으로 옳게 나타낸 것은?



① $A^c = \{20, 30\}$

② $A^c = \{40, 50, 60\}$

③ $B^c = \{40, 60\}$

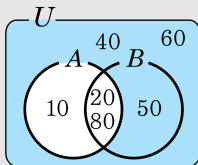
④ $B^c = \{10, 40, 60\}$

⑤ $(A \cap B)^c = \{10, 40, 60\}$

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 A^c 이므로

$A^c = \{40, 50, 60\}$



8. 집합 A, B 가 전체집합 U 의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup \emptyset = A$

② $A \cup A^c = U$

③ $(A^c)^c = A$

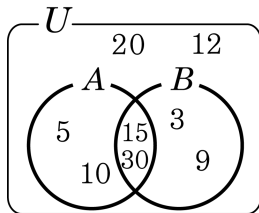
④ $\emptyset^c = U$

⑤ $A - B = A \cup B^c$

해설

$$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$$

9. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $n(U) = 8$

② $n(A - B) = 2$

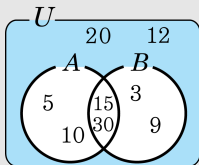
③ $n(B - A) = 2$

④ $n((A \cup B)^c) = 3$

⑤ $n(A^c) = 4$

해설

④ $(A \cup B)^c$ 을 색칠하면 다음 부분과 같다.



$\therefore n((A \cup B)^c) = 2$

10. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f 가 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f(\sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$\sqrt{2}$ 와 $1 - \sqrt{2}$ 는 모두 무리수이므로,

$$f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = 1 - (1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\therefore f(\sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1$$

11. 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $c \subset A$

㉡ $d \notin A$

㉢ $\{a\} \in A$

㉣ $\{b, c\} \subset A$

㉤ $A \subset \{a, b, c, d, e, f\}$

① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣

③ ㉡, ㉢, ㉤

④ ㉡, ㉣, ㉤

⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ $c \in A$

㉢ $\{a\} \subset A$

12. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $\{\emptyset\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이다.
- ② $\{x, y\}$ 는 $\{y\}$ 의 부분집합이 아니다.
- ③ $A \subset B, B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
- ④ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ⑤ $A \subset B, A \subset C$ 이면 $B \subset C$ 이다.

해설

- ① $\{\emptyset\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이 아니다. $\{3\}$ 의 부분집합은 $\emptyset$ 과 $\{3\}$ 이다.
- ⑤ $A \subset B, A \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이고, B 와 C 의 포함 관계는 알 수 없다.

13. 자연수 집합의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 일 때, $A \cap B$ 의 진부분집합의 개수와 $A \cup B$ 의 진부분집합의 개수의 합은?

① 46개

② 48개

③ 70개

④ 72개

⑤ 74개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로

$A \cap B = \{3, 5, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 $A \cap B$ 의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이고,

$A \cup B$ 의 진부분집합의 개수는 $2^6 - 1 = 63(\text{개})$ 이므로 $63 + 7 = 70(\text{개})$

14. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 13 \text{보다 작은 홀수}\}$ 일 때, B 의 원소의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면, $A = B$ 이다.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 이므로

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

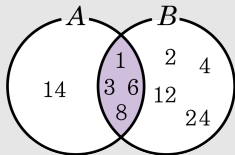
따라서 $n(B) = 6$ 이다.

15. $A = \{1, 3, 6, 8, 14\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?

- ① $\{1, 3, 6, 8\}$
- ② $\{1, 3, 6, 8, 12, 24\}$
- ③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 14, 24\}$
- ④ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$
- ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다.
다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



그러므로 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$ 가 된다.

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B 에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

▶ 답 :

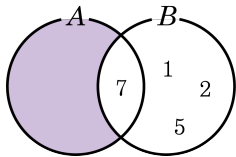
▷ 정답 : 23

해설

$A \cap B^c = A - B = A$ 이므로 A, B 는 서로소

$$n(A \cap B) = 0, n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$$

17. 다음 벤 다이어그램에서 $B = \{1, 2, 5, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ 일 때 색칠된 부분의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

색칠한 부분의 원소는 집합 $A \cup B$ 에서 $A \cap B$ 의 원소를 뺀 것이다.
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ 이므로 벤 다이어그램에 표시되어 있지 않은 원소를 말한다.

그러므로 색칠한 부분의 원소는 3, 8, 9 이다.

원소의 합은 $3 + 8 + 9 = 20$ 이다.

18. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, $A \cup X = A$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

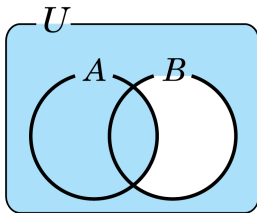
해설

$(A \cap B) \subset X \subset A$ 이므로

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이다.

집합 X 는 2, 4를 원소로 갖는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-2} = 2^2 = 4(\text{개})$ 이다.

19. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5\}, B = \{1, 3, 5\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



① $\{2, 4\}$

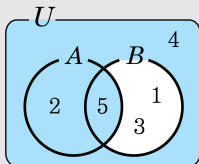
② $\{4, 5\}$

③ $\{2, 4, 5\}$

④ $\{1, 2, 3, 4\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 5\}$

해설



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{2, 4, 5\}$ 이다.

20. $A = \{2, 3, a + 2\}, B = \{a - 1, 4\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4\}$ 일 때, $B - A$ 는?

- ① {1} ② {2} ③ {4} ④ {1, 2} ⑤ {1, 5}

해설

$A \cap B = \{4\}$ 이므로 $a + 2 = 4, a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 4\}$ 이므로 $B - A = \{1\}$ 이다.

21. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{4, 8\}$

④ $\{2, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

22. 통일고등학교에서 50명 학생을 대상으로 수학, 영어에 대한 흥미도를 조사한 결과를 수학을 좋아하는 학생은 32명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 13명이었다. 그렇다면 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 4명

해설

수학 : A , 영어 : B , 전체 : U

$$n(A) = 32, n(B) = 27, n(A \cap B) = 13$$

$$n(A \cup B) = 32 + 27 - 13 = 46$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B) = 50 - 46 = 4$$

$$\therefore 4\text{명}$$

23. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

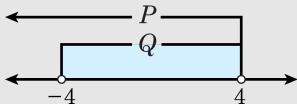
24. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, $q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

25. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

26. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$

② $A < B$

③ $A \geq B$

④ $A \leq B$

⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

27. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

28. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

29. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$5 \times 3 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$$

따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

30. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉣, ㉤

해설

- ㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r 는 오직 하나의 넓이 πr^2 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
- ㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
- ㉤ 특정한 실수 a 를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\dots$ 등 무수히 많다. 즉, 실수 a 에 a 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
- 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

31. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$f(a) + f(b) = |a| + |b|$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$

$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$

$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$

32. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

33. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

34. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을

$f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.

$$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ 또는 } f(x) = 1$$

만일 $f(x) = 1$ 이면

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots \text{ 이다.}$$

위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로

$$f(x) = 1 \text{ 은 부적당}$$

$$\therefore f(0) = 0$$

35. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

36. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

37. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

38. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

39. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$$

$$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0 \text{ 따라서 } k = -1$$

40. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{ 이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

41. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = B$ 를 만족할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $A^c \subset B^c$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B \\ &= (A \cap U) \cap B = A \cap B = B \end{aligned}$$

즉, $B \subset A$ 이다.

따라서 $A^c \subset B^c$ 역시 성립한다.

42. 다음 명제 중 참인 것은? (단, x, y, z 는 실수이다.)

① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

② $x + y > 0, xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.

⑤ 삼각형 ABC 가 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

해설

② $xy > 0$ 이면, x 와 y 의 부호가 같다는 것인데 $x + y > 0$ 이려면 둘 다 양수여야 하므로 참이다.

43. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $q \rightarrow p$

② $r \rightarrow q$

③ $r \rightarrow p$

④ $\sim q \rightarrow \sim r$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$,

$Q \cap R = R$ 이므로 $R \subset Q$

따라서 $R \subset Q \subset P$

$\therefore r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $r \Rightarrow p$ 의 대우는 $\sim p \Rightarrow \sim r$

따라서 ⑤는 참인 명제라 할 수 없다.

44. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$$

45. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$



답:

조건



정답: 충분조건

해설

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

$$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$$

$$(P \cap U) \cap Q = P$$

$$P \cap Q = P$$

$$P \subset Q$$

$$\therefore p \Rightarrow q$$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

46. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

47. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $-x^2 + 4x - 6 < 0$

㉡ $x^2 - 6x + 9 > 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

㉣ $a = b < 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

㉤ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

㉡ $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$

㉤ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b \geq bx + a$

48. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()
안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$

④ $a - b$

⑤ ab

해설

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

49. 두 함수 $f(x) = 2x+5$, $g(x) = -3x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20

② -10

③ 0

④ 10

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

50. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

㉠ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉣ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.