

1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 아주 작은 정수들의 모임

② 성이 김씨인 중학생들의 모임

③ 중간고사 수학 성적이 80점 이상인 학생들의 모임

④ 0보다 작은 음수들의 모임

⑤ 착한 학생들의 모임

해설

‘아주 작은’ 혹은 ‘착한’의 기준은 객관적이지 못하므로 집합이 될 수 없다.

2. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$$a \in A \text{ 이면 } \frac{a}{a-1} \in A \text{ (단, } a \neq 1 \text{)}$$

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$$

$$-1 \in A \text{ 이면 } \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$$

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \dots$$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

3. 다음 중 공집합인 것은?

① $\{x|x-5=3, x\text{는 짝수}\}$

② $\{x|x\text{는 } x \times 0 = 0\text{인 자연수}\}$

③ $\{x|x < 1\text{인 자연수}\}$

④ $\{x|x\text{는 } 2\text{의 약수}\}$

⑤ $\{x|-1 < x < 1, x\text{는 정수}\}$

해설

③ 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합

4. 집합 $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \in A$

② $\emptyset \subset A$

③ $\{1, 2\} \subset A$

④ $\{1, 2\} \in A$

⑤ $\{2\} \in A$

해설

$\{2\} \subset A$

5. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개

② 11 개

③ 13 개

④ 15 개

⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

6. 세 집합 A, B, C 가 $A \cup B = C$, $B \cap C = C$ 를 만족할 때, 다음 중 두 집합 A, B 사이의 관계로 옳은 것은?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = \emptyset$

③ $A^c \cup B^c = \emptyset$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A - B = \emptyset$

해설

$A \cup B = C$ 에서 $A \subset C$, $B \subset C \dots \textcircled{\Gamma}$

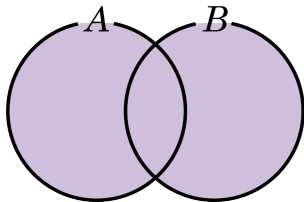
$B \cap C = C$ 에서 $C \subset B \dots \textcircled{\text{L}}$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$ 에서 $B = C$

따라서 $A \subset C$, $B = C$ 이므로 $A \subset B$

$\therefore A - B = \emptyset$

7. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ?



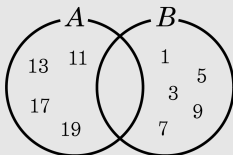
- ① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 ② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
 ③ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17\}$
 ④ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
 ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면

$$A = \{11, 13, 17, 19\}$$

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



색칠한 부분이 나타나는 원소는
 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.

8. 두 집합 A, B 에 대하여 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $(A \cap B) \subset B$

㉡ $A \cap \emptyset = A$

㉢ $(A \cup B) \subset B$

㉣ $B \cup \emptyset = B$

① ㉠, ㉣

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ $A \cap \emptyset = \emptyset$

㉢ $B \subset (A \cup B)$

9. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = B - A$ 이 성립하기 위한 A, B 사이의 관계는 ?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $B \subset A$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \\ = B - A$$

$$\therefore A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

10. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$

11. 세 집합 $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $C = \{4, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C$ 는?

① $\{3\}$

② $\{8\}$

③ $\{3, 8\}$

④ $\{3, 8, 9\}$

⑤ $\{3, 5, 7\}$

해설

$(A - B) \cap C = \{2, 5, 8\} \cap \{4, 7, 8, 9\} = \{8\}$ 이다.

12. 전체 집합 $U = \{x \mid |x| \leq 10 \text{인 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \leq 4 \text{인 정수}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 10 \text{인 소수}\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소의 합은?

① -5

② -10

③ -12

④ -15

⑤ -18

해설

$$U = \{-10, -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9, 10\},$$

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) \text{ 이고 } A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\} \text{ 이므로}$$

$$A^c \cap B^c = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, 6, 8, 9, 10\}$$

따라서 원소의 합은 -12

13. 어느 반의 63%의 학생은 공부를 잘하고 76%의 학생은 운동을 잘한다. 운동도 잘하고 공부도 잘하는 학생수의 최대, 최소 %(백분율)는 각각 얼마인가 ?

① 최대 89%, 최소 13%

② 최대 63%, 최소 39%

③ 최대 76%, 최소 37%

④ 최대 39%, 최소 24%

⑤ 최대 76%, 최소 39%

해설

전체집합을 U , 공부를 잘하는 학생의 집합을 A , 운동을 잘하는 학생의 집합을 B 라 하면 공부도, 운동도 잘하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다. $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \subset B$ 일 때 최대가 되고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \cup B = U$ 일 때 최소가 된다. $A \subset B$ 일 때 $A \cap B = A$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) = 63\%$

$A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cup B) = 100\%$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U) = 63 + 76 - 100 = 39(\%)$

따라서, 최대 63%, 최소 39%

14. 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ ' 의 진리집합은 $\{2, 3\}$ 이다.
- ② 조건 ' x 는 소수이다.'의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
- ③ 조건 ' x 는 4 의 약수이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$ 이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$ 이다.
- ⑤ 조건 ' x 는 6 의 약수이다.'의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.

해설

- ① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$
 , 따라서, 진리집합은 $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 4\}$
- ④ $x = 0, 1, 2, 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$

15. 다음 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

- ㉠ 임의의 유리수 x 에 대하여 $x + y = \sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다.
- ㉡ 임의의 유리수 x 에 대하여 $xy = 1$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다.
- ㉢ 임의의 무리수 x 에 대하여 $xy = 1$ 을 만족하는 무리수 y 가 존재한다.
- ㉣ 임의의 무리수 x 에 대하여 $\sqrt{3}x$ 는 무 리수이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

- ㉠ 주어진 조건을 만족하는 유리수 y 가 존재한다면 (유리수)+(유리수)=(무리수)가 되므로 모순이다. (거짓)
 - ㉡ $x = 0$ 일 때, $xy = 1$ 을 만족하는 y 는 존재하지 않는다. (거짓)
 - ㉢ x 가 무리수이므로 $x \neq 0$ 이다. 즉, $xy = 1$ 에서 $y = \frac{1}{x}$ 은 무리수이므로 무리수 y 가 존재한다. (참)
 - ㉣ $x = \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{3}x = \sqrt{3}\sqrt{3} = 3$ 이 되어 유리수이다. (거짓)
- 따라서 참인 명제는 ㉢ 하나뿐이다.

16. 다음 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, $Q^c \subset P^c$ 인 경우는?

① $p : x \leq 1$

$q : x \leq 1$

② $p : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$q : x = 1$

③ $p : a > 0, b > 0$

$q : a^2 + b^2 \geq 2a - 1$

④ $p : x$ 가 3의 배수

$q : x$ 는 9의 배수

⑤ $p : x^2 - 1 = 0$

$q : (x + 1)^2 = 0$

해설

$$Q^c \subset P^c, P \subset Q$$

① $Q \subset P$

② $Q \subset P$

④ $Q \subset P$

⑤ $Q \subset P$

③ $q : a^2 + b^2 \geq 2a - 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 \geq 0 \rightarrow (a - 1)^2 + b^2 \geq 0$
 $\rightarrow a, b$ 는 모든 실수

17. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
- ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
- ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
- ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
- ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

18. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$

② $\sim p \Rightarrow \sim s$

③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$

⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

19. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B 이다.

B : 범인은 D 이다.

C : 나는 범인이 아니다.

D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D

② B, C

③ C, B

④ D, C

⑤ B, A

해설

B 가 옳은 진술이라면 범인은 D 가 되고 C 도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B 는 거짓이 되고, D 가 옳은 진술이 된다. D 를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C 다.

20. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되는 것은? (단, x, y, z, a 는 실수)

① $p : x = 1, q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$

④ $p : xz = yz, q : x = y$

⑤ $p : a$ 는 4의 배수, $q : a$ 는 2의 배수

해설

$$p : xz = yz, \quad q : x = y$$

$$P : xz - yz = (x - y)z = 0,$$

$$\therefore x = y \text{ or } z = 0$$

$$Q : x = y$$

$$\therefore P \supset Q \rightarrow p \leftarrow q$$

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cap B \neq \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$(A \cup B) - A = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = A$$

22. $-1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ 이기 위한 필요조건은 $x \geq a$ 이고, 충분조건은 $x \geq b$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

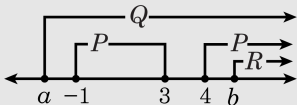
④ 2

⑤ 3

해설

$P = \{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 4\}$, $Q = \{x \mid x \geq a\}$, $R = \{x \mid x \geq b\}$

이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$$a \leq -1, \quad b \geq 4$$

$$\therefore -1 + 4 = 3$$

23. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

24. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

①

16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

해설

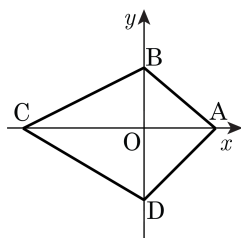
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

25. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37

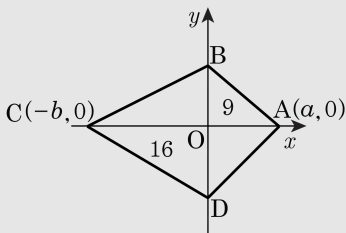
② 40

③ 43

④ 46

⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

26. $a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $ax + by$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \leq ax + by \leq 4$

② $-9 \leq ax + by \leq 9$

③ $-6 \leq ax + by \leq 6$

④ $0 \leq ax + by \leq 36$

⑤ $-36 \leq ax + by \leq 36$

해설

$a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 이면

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에서

$4 \cdot 9 \geq (ax + by)^2$

$\therefore -6 \leq ax + by \leq 6$

27. 정의역이 $\{0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$, $g(0) = 1$ 에서 $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$, $g(1) = 3$ 에서 $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

28. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

29. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일 대응은 몇 가지인가?

① 6

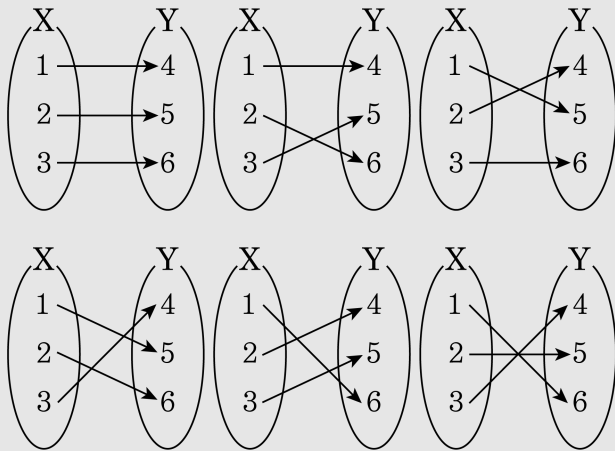
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



∴ 6가지

30. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 12 개

⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이려면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

31. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면

$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로

양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$

$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)

즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로

$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로

$a + b = 0$, 즉 $b = -a$

$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$

$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$

$= a^2x - a^2 - a = x$

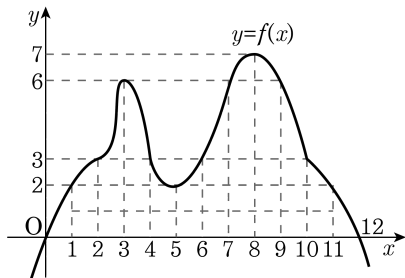
이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$

$\therefore a = -1$

즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

32. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,

$$f(f(x+2)) = 6$$

$x+2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$

$$\therefore f(t) = 3 \text{ 또는 } f(t) = 7 \text{ 또는 } f(t) = 9$$

그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로

$$f(t) = 3 \text{ 또는 } f(t) = 7$$

(i) $f(t) = 3$ 일 때,

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4 \text{ 또는 } t = 6 \text{ 또는 } t = 10$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$

$$\therefore x = 6$$

(i), (ii) 에서

실수 x 의 값은 0, 2, 4, 6, 8 의 5 개이다.

33. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{이 } 2 \text{의 배수일 때}) \\ n+1 & (n \text{이 } 2 \text{의 배수가 아닐 때}) \end{cases} \quad \text{로 정의하자.}$$

$f = f^1$, $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3$, $\dots$, $f \circ f^n = f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10) = 2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$f(10) = 5$$

$$f^2(10) = f(f(10)) = f(5) = 6$$

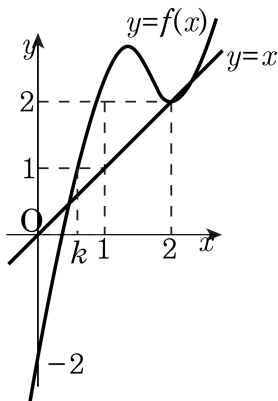
$$f^3(10) = f(f^2(10)) = f(6) = 3$$

$$f^4(10) = f(f^3(10)) = f(3) = 4$$

$$f^5(10) = f(f^4(10)) = f(4) = 2$$

따라서, $f^k(10) = 2$ 가 되는 k 의 최솟값은 5이다.

34. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)



① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 11

해설

$$f(k) = 1$$

$$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$$

$$\begin{aligned} f^3(k) &= f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1) \\ &= f(f(1)) = f(2) = 2 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$f^{10}(k) = 2$$

35. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

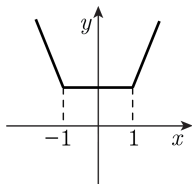
$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$$

$$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

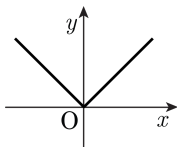
따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

36. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?

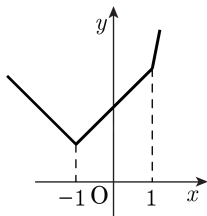
①



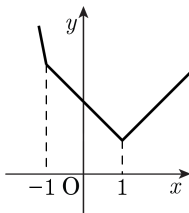
②



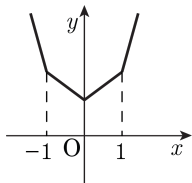
③



④



⑤



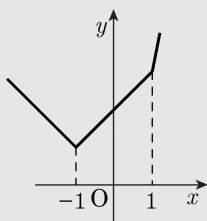
해설

$$\begin{aligned} \text{i) } x \leq -1 \text{ 일 때, } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x - (x + 1) \\ &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } -1 < x \leq 1 \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x + (x + 1) \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 1 < x \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= (x - 1) + x + (x + 1) \\ &= 3x \end{aligned}$$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



37. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?

① P(-2)

② P(-1)

③ P(0)

④ P(1)

⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

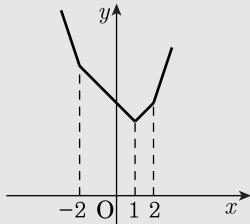
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$$

$y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)이다.



38. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 0

② -1

③ 1

④ -10

⑤ 10

해설

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10} \text{의 양변에}$$

$(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$ 을 곱하면

$$1 = a_1(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$

$$+ a_2(x-1)(x-3)\cdots(x-10)$$

$$+ \cdots + a_{10}(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

$$1 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

39. 분수식 $2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots}}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

(준식) = a 라 하면

$$2 - \frac{1}{a} = a \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

40. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 을 전개하면

$$xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 27 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 3(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 9(x + y + z) = 27$$

$$\therefore x + y + z = 3$$

41. $2x - y$ 의 $x + y$ 에 대한 비가 $\frac{2}{3}$ 일 때, x 의 y 에 대한 비는?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{4}{5}$

③ 11

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\frac{2x - y}{x + y} = \frac{2}{3}, 3(2x - y) = 2(x + y), 4x = 5y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

42. 세 개의 숫자가 있다. 이들 중 서로 다른 두 수씩 더하면 각각 a, b, c 되고, 이 세수의 곱은 1이라 한다. 이때, 이들 세 수 중 서로 다른 두 수씩 곱한 수들의 역수의 합은?

① $a + b + c$

② abc

③ $ab + bc + ca$

④ $\frac{a + b + c}{2}$

⑤ $\frac{a + b + c}{3}$

해설

세 수를 각 p, q, r 이라고 하면

$$\begin{cases} p + q = a \\ q + r = b \\ r + p = c \end{cases}$$

$$pqr = 1, p + q + r = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} = \frac{p + q + r}{pqr} = \frac{a + b + c}{2}$$

43. 무리식 $\sqrt{2x+5} + \sqrt{15-3x}$ 가 실수값을 갖도록 하는 정수 x 의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

$$2x + 5 \geq 0, 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$$

$$15 - 3x \geq 0, 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$$

$$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$$

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 총 8개

44. $x = a + \frac{1}{a}$ (단, $a > 1$) 일 때, $x + \sqrt{x^2 - 4}$ 를 a 로 나타내면?

① $2a$

② $\frac{2}{a}$

③ a

④ $\frac{1}{a}$

⑤ $a + \frac{1}{a}$

해설

$$x = a + \frac{1}{a} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 4 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = \\ &\quad \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 4} &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \\ &= a + \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(\because a - \frac{1}{a} > 0\right) \\ &= 2a \end{aligned}$$

45. 양수 a 의 소수 부분을 b 라 할 때, $a^2 + b^2 = 8$ 을 만족하는 a 의 값을 구하면?

① $1 + \sqrt{3}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 - \sqrt{3}$

⑤ $3 + 2\sqrt{3}$

해설

(i) a 가 정수일 때,

$$b = 0, a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ (모순)}$$

(ii) $a > 0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$

a 의 정수부분을 k 라 하면

$$a = k + b \quad (0 < b < 1) \text{ 이라 하면}$$

$$a^2 + b^2 = 8 \text{ 에서 } b^2 = 8 - a^2$$

$$0 < 8 - a^2 < 1, \sqrt{7} < a < \sqrt{8}$$

$$\therefore k = 2 \quad \therefore b = a - 2$$

$$a^2 + (a - 2)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = 8$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0, a = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 1 + \sqrt{3} (\because a > 0)$$

46. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2$ 일 때, $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}}$ 의 값

은?

① $-1 + \sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 4$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{이므로}$$

$$x + 2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \text{의 값을 } a \text{라 하면}$$

$$\frac{1}{2 + a} = a, a(2 + a) = 1, a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -1 + \sqrt{2}$$

47. 함수 $y = \frac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

① 2, -4

② -2, 4

③ 2, 4

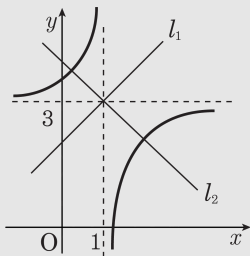
④ -2, -4

⑤ 3, 5

해설

$$y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 3$$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

$$l_1 : y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \therefore y = x + 2$$

$$l_2 : y - 3 = -1 \cdot (x - 1) \therefore y = -x + 4$$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

48. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-2}{x+2} \text{ 일 때,}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = 2 \text{ 에서 } (x-1) = 2(x+1)$$

$$x-1 = 2x+2$$

$$\therefore x = -3$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f(2) = \frac{-3-2}{-3+2} = \frac{-5}{-1} = 5$$

49. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 점 $(2, 7)$ 을 지나고 이 함수의 역함수가 $y = \frac{x+c}{x-3}$ 일 때, a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

① -27

② -9

③ -3

④ 3

⑤ 9

해설

점 $(2, 7)$ 을 지나면 역함수는 $(7, 2)$ 를 지난다.

$$2 = \frac{7+c}{7-3} \text{ 에서 } c = 1$$

이제 원래 함수를 구해보면 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 에서

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-1} \dots\dots \text{역함수}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 1$$

$$\therefore abc = 3$$