1. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면
$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$이므로
$a_3 = S_3 - S_2$
$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
$\log_3(T_n - 1) = n$에서 $T_n = 3^n + 1$이므로
$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
$= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore \ k = 13$

2. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$

② $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$

③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$

④ $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^{2n}-1\right\}}{r}$

⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$$

3. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\log_2 a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$$
$$= 3n - 1$$
$$a_n = 2^{3n-1}$$
$\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

4. 세 양수 $a,\ b,\ c$는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

㉠ $a+b+c=\frac{7}{2}$	㉡ $abc=1$

이때 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

공비를 r라 하면 $a+b+c=a+ar+ar^2=\frac{7}{2}$에서

$a(1+r+r^2)=\frac{7}{2}\cdots$㉠

또, $abc=a\cdot ar\cdot ar^2=1$에서 $a^3r^3=(ar)^3=1$이고

$a,\ r$는 실수이므로 $ar=1\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2},\ 2r^2+2r+2=7r,\ 2r^2-5r+2=0$

$(r-2)(2r-1)=0\ \therefore r=2$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 세 수는 $2,\ 1,\ \frac{1}{2}$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

5. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 15,\ a_3 + a_4 = 240$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 189　② 192　③ 195　④ 198　⑤ 201

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r) = 15 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1+r) = 240 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면 $r^2 = 16 \quad \therefore\ r = 4(\because\ r > 0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$5a = 15 \quad \therefore\ a = 3$

따라서 $a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1+r^3) = 3 \times 65 = 195$

6. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2a_3a_4 = \frac{1}{8}$일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$에서, $a_1 + a_1r^2 = \frac{5}{6}$

$a_2a_3a_4 = \frac{1}{8}$에서 $(a_1r^2)^3 = \frac{1}{8}$

즉, $a_3 = a_1r^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

8. 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$의 값은?

① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$
$= 2n + 2$ ⋯⋯ ㉠
$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$
이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n + 2$
$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$

9. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_2 + a_4 + a_6$의 값은?

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

해설

$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
$S_{n-1} = (n-1+1)^2 = n^2$
$a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \ (n \geq 2)$
$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=28$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 175

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=4a+48d=28$

$a=7-12d$

$a_1+a_2+\cdots+a_{25}$

$=\dfrac{25\left\{2(7-12d)+(25-1)d\right\}}{2}=175$

11. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10} = 85,\ S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$

$S_{10} = \dfrac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots$ ㉠

$S_{20} = \dfrac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5,\ d = 3$

$\therefore\ S_{30} = \dfrac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

12. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

13. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 a_2, a_6, a_{10}과 a_5, a_6, a_7은 모두 등차수열을 이룬다.
따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등차중항이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$
$$= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6$$
$$= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6$$
$$= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because\ a_5 + a_7 = 60)$$
$$= 150$$

14. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2p+1,\ p^2,\ 2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6,\ p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

15. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

1, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}, 10

1, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{20}, 10

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{11}{21}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

1, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}, 10의 공차를 p라 하면 $1+11p=10 \Rightarrow p=\dfrac{9}{11}$

1, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{20}, 10의 공차를 q라 하면 $1+21q=10 \Rightarrow q=\dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}=\frac{9p}{9q}=\frac{p}{q}=\frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}}=\frac{21}{11}$$

16. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

① 공차가 2인 경우 (4가지)
2, 4, 6　4, 6, 8　6, 8, 10　8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)
2, 6, 10　4, 8, 12

17. 이차방정식 $(2+k)x^2+4x-(1+k)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \geq 1$
② $k \leq -2$
③ k는 모든 실수
④ k는 없다.
⑤ $k \neq -2$인 모든 실수

해설

이차방정식이므로 $k \neq -2$
실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로
$D' = 2^2 + (k+2)(k+1) \geq 0$
$k^2+3k+6 \geq 0$
$k^2+3k+6 = (k+\frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} \geq 0$이므로
모든 실수 k에 대해 성립.
$\therefore\ k \neq -2$인 모든 실수

18. x의 이차방정식 $mx^2+2(1-2m)x+m=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0<m<\frac{1}{3}$ ② $m<\frac{1}{3},\ m>1$
③ $m<0,\ 0<m<\frac{1}{3},\ m>1$ ④ $m<0\ ,\ m>1$
⑤ $\frac{1}{3}<m<1$

해설
이차방정식이므로 $m\neq 0$ ⋯㉠
$\frac{D}{4}=(1-2m)^2-m^2>0$에서
$(m-1)(3m-1)>0,\ m<\frac{1}{3},\ m>1$ ⋯㉡
㉠, ㉡에서 $m<0,\ 0<m<\frac{1}{3},\ m>1$

19. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1)-1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$　　② $-3 \le a \le 1$
③ $a < -3$ 또는 $a > 1$　　④ $-3 < a < 1$
⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$ 이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore\ -3 \le a \le 1$

20. 함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최솟값이 -3 일 때, 상수 a 의 값을 정하고, 함수 $y = ax^2 - 2x + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$　　② 최댓값 $\frac{3}{2}$　　③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$
④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$　　⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$y = (x-1)^2 + a - 1$ 이므로
$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.
$a - 1 = -3 \quad \therefore\ a = -2$
$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$
$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
따라서 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$

21. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x)-f(-x)=x^2-3x+8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$2(ax^2+bx+c)-(ax^2-bx+c)=x^2-3x+8$

$\Rightarrow b=-1, c=8, a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+8=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

22. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

23. 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2-3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\frac{3+a}{2}$, $1\times5=\frac{1-b}{2}$

$\therefore a=9,\ b=-9$

$\therefore ab=-81$

24. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와 직선 $y = x + 3a$가 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$　② $-12 < a < 2$　③ $-11 < a < 1$
④ $-11 < a < 2$　⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와
직선 $y = x + 3a$는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$에서
$D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
$a^2 + 10a - 11 < 0$, $(a+11)(a-1) < 0$
$\therefore\ -11 < a < 1$

25. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠

$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면

$x^2 + ax + a = x + 1$

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면

$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$

$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$

$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5

따라서 구하는 a의 값은 6

26. 직선 $y = mx - 1$은 곡선 $y = x^2 + x$와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m의 값의 범위는?

① $1 < m < 3$ ② $-1 < m < 3$ ③ $-1 < m < 1$
④ $-3 < m < 1$ ⑤ $-3 < m < -1$

해설

(i) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가
서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$의 판별식을 D_1 이라하면
$D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0$에서 $m^2 - 2m - 3 > 0$
$\therefore m < -1$ 또는 $m > 3 \cdots$ ㉠
(ii) 직선 $y = mx - 1$과 곡선 $y = x^2 - x$는 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$의 판별식을 D_2 라 하면
$D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0$에서 $m^2 + 2m - 3 < 0$
$\therefore -3 < m < 1 \cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡의 공통범위를 구하면
$-3 < m < -1$

27. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 0, a > 1$　② $0 < a < 1$　③ $a < 1, a > 2$
④ $1 < a < 2$　⑤ $a < -1, a > 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가
x 축과 만나지 않으면
판별식 D 가 $D < 0$ 이므로
$\frac{D}{4} = a^2 - a < 0,\ a(a-1) < 0$
$\therefore\ 0 < a < 1$

28. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$의 그래프가 직선 $y = x + 1$의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$
② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$
③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$
④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$
⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$의 그래프가 직선 $y = x + 1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x에 대하여

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 항상 성립하여야 한다.

따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$의 판별식 $D < 0$이어야 한다.

$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$

$(m+2)(3m-2) > 0$

$\therefore m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

29. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$, $y = x + 1$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하면?

① $m < -2$, $m > \frac{2}{3}$ ② $m < -1$, $m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2$, $m > 2$ ④ $m < 2$, $m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5$, $m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족하도록 m을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서

판별식 $D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$, $(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore \ m < -2$, $m > \frac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 \ \cdots\cdots$ ㉠

$y = x + 1 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 ㉠의 그래프는 m의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.

이를테면 $m = 0$, $m = 1$일 경우에 대해서 생각해 보자.

(i) $m = 0$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 - x + 1$이므로

이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 위에 있는 x의 범위는 부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$을 만족하는 x의 범위와 같다.

(ii) $m = 1$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 + 2$이므로

이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위에 있으므로 ㉠이 ㉡보다 항상 위에 있는 x의 범위는 x의 모든 실수값이다.

이 문제의 경우는 (ii) 같이 되도록 m의 범위를 정하라는 것이다.

㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

곧, $x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 x의 모든 실수값에 대하여 항상 성립하면 된다.

이 결과는 ㉠, ㉡의 그래프가 만나지 않도록 m의 범위를 정한 것과 같다.

그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로

'포물선이 직선보다 위쪽에 있다' 는 것과 '포물선과 직선이 만나지 않는다' 는 것과는 그 뜻이 다르다.

30. 이차함수 $y=x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2-2(k-1)x+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면
이차방정식 $y=x^2-2(k-1)x+9=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-9<0$

$k^2-2k-8<0$, $(k+2)(k-4)<0$

$\therefore -2<k<4$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

31. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로

$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

32. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10}-1)$　② $\frac{1}{10}(3^{10}-1)$　③ $\frac{1}{9}(3^{10}+1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10}+1)$　⑤ $\frac{1}{9}(3^{11}-1)$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$ar^3 = 6,\ ar^6 = 162$
$r^3 = 27$
$\therefore\ r = 3,\ a = \frac{2}{9}$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9}\cdot(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{1}{9}(3^{10}-1)$$

33. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots$ ㉠

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2\ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

34. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\left\{n+2-(n-1)\right\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

35. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　② 80　③ 92　④ 100　⑤ 120

해설

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a+2d=5 \cdots ㉠$

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a+3d=7 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d=2,\ a=1$

$\therefore\ S_{10} = \dfrac{10(2\cdot 1+9\cdot 2)}{2} = 100$

36. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,$

$b_{100} = a_{99},\ \ b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

37. 이차부등식 $x^2-6x+9\le 0$의 해를 구하면?

① $x\ge 3$ 또는 $x\le -3$
② x는 모든 실수
③ $x\ne 3$인 모든 실수
④ $x=3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2-6x+9\le 0$
$(x-3)^2\le 0$
$\Rightarrow x=3$

38. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k,\ y = k^2 + k + 2$
② $x = k,\ y = k^2 - 3k + 4$
③ $x = 2k,\ y = k^2 + 4k + 1$
④ $x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$
⑤ $x = 3k,\ y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
$= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$

39. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3\ (\because k > 0)$

40. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

41. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27 ② 10, 23, 29 ③ 11, 23, 27
④ 11, 23, 29 ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

42. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = -6n + 7$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a = -1,\ d = 5$ ② $a = -1,\ d = 6$ ③ $a = 1,\ d = -5$
④ $a = 1,\ d = -6$ ⑤ $a = 2,\ d = 7$

해설

$a_n = -6n + 7$이므로
$a_1 = -6 \cdot 1 + 7 = 1$,
$a_2 = -6 \cdot 2 + 7 = -5$이므로
$d = a_2 - a_1 = -6$