

1. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면

$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$S_n = n^2 + kn \text{ 이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$$

$$\log_3(T_n - 1) = n \text{ 에서 } T_n = 3^n + 1 \text{ 이므로}$$

$$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$$

$$= 28 - 10 = 18$$

$$\text{이때, } a_3 = b_3 \text{ 이므로 } k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$$

2. 수열 $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\frac{2a + 4r^n}{r}$

③ $\frac{a(1+r) + (1+r)^n}{r}$

⑤ $\frac{a(1+r) - r^n + 2}{r}$

② $\frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{r}$

④ $\frac{a(1+r) \{ (1+r)^{2n} - 1 \}}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{(1+r) - 1} \\ &= \frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{r} \end{aligned}$$

3. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

4. 세 양수 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{㉠} \quad a + b + c = \frac{7}{2}$$

$$\textcircled{㉡} \quad abc = 1$$

이때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

$$\textcircled{㉠} \quad \frac{13}{4}$$

$$\textcircled{㉡} \quad \frac{15}{4}$$

$$\textcircled{㉢} \quad \frac{17}{4}$$

$$\textcircled{㉣} \quad \frac{19}{4}$$

$$\textcircled{㉤} \quad \frac{21}{4}$$

해설

공비를 r 라 하면 $a + b + c = a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$ 에서

$$a(1 + r + r^2) = \frac{7}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$ 에서 $a^3 r^3 = (ar)^3 = 1$ 이고
 a, r 는 실수이므로 $ar = 1 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{7}{2}, \quad 2r^2 + 2r + 2 = 7r, \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(r - 2)(2r - 1) = 0 \quad \therefore r = 2 \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서 } a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 세 수는 2, 1, $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

5. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = 15$, $a_3 + a_4 = 240$ 일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은?

① 189

② 192

③ 195

④ 198

⑤ 201

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = a + ar = a(1 + r) = 15 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1 + r) = 240 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^2 = 16 \quad \therefore r = 4 (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$5a = 15 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1 + r^3) = 3 \times 65 = 195$$

6. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$ 일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{6} \text{ 에서, } a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$$

$$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8} \text{ 에서 } (a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{즉, } a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, 수열 $\{3a_{n+1} - 2a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\{3a_{n+1} - 2a_n\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$$

$$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$$

따라서 $r = 2$ 이고 $3ar - 2a = 12$ 이다.

$$6a - 2a = 12, 4a = 12$$

$$\therefore a = 3$$

8. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$ 의 값은?

① 32

② 34

③ 36

④ 38

⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$$

이것은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2n + 2$

$$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$$

9. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값은?

① 25

② 26

③ 27

④ 28

⑤ 29

해설

$$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$$S_{n-1} = (n - 1 + 1)^2 = n^2$$

$$a_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \quad (n \geq 2)$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$$

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 28$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 175

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 4a + 48d = 28$

$$a = 7 - 12d$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}$$

$$= \frac{25 \{2(7 - 12d) + (25 - 1)d\}}{2} = 175$$

11. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$ 의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = 85, S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{30 \{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

12. 두 수 $2p + 7$ 과 $2p + 9$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2p + 7, p^2, 2p + 9 \text{ 가 등차수열을 이루므로 } p^2 = \frac{(2p + 7) + (2p + 9)}{2}$$

$$2p^2 = 4p + 16, p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p + 2)(p - 4) = 0$$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p 는 양수이므로 $p = 4$

13. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$ 일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 의 값은?

① 140

② 145

③ 150

④ 155

⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_5, a_6, a_7 은 모두 등차수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등차중항이므로

$$\begin{aligned} & a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} \\ &= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6 \\ &= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6 \\ &= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because a_5 + a_7 = 60) \\ &= 150 \end{aligned}$$

14. 두 수 $2p + 1$ 과 $2p + 5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$2p + 1, p^2, 2p + 5 \text{ 가 등차수열을 이루므로 } p^2 = \frac{(2p + 1) + (2p + 5)}{2}$$

$$2p^2 = 4p + 6, p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p + 1)(p - 3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

15. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$$

$$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1}$ 의 값은?

① $\frac{10}{21}$

② $\frac{11}{21}$

③ $\frac{20}{11}$

④ $\frac{21}{11}$

⑤ 2

해설

1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면 $1 + 11p = 10 \Rightarrow$

$$p = \frac{9}{11}$$

1, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면 $1 + 21q = 10 \Rightarrow$

$$q = \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

16. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \text{등차수열}$$

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

17. 이차방정식 $(2+k)x^2 + 4x - (1+k) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \geq 1$

② $k \leq -2$

③ k 는 모든 실수

④ k 는 없다.

⑤ $k \neq -2$ 인 모든 실수

해설

이차방정식이므로 $k \neq -2$

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$D' = 2^2 + (k+2)(k+1) \geq 0$$

$$k^2 + 3k + 6 \geq 0$$

$$k^2 + 3k + 6 = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0 \text{ 이므로}$$

모든 실수 k 에 대해 성립.

$\therefore k \neq -2$ 인 모든 실수

18. x 의 이차방정식 $mx^2 + 2(1 - 2m)x + m = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 m 의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$

② $m < \frac{1}{3}, m > 1$

③ $m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$

④ $m < 0, m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \dots \textcircled{\Gamma}$

$$\frac{D}{4} = (1 - 2m)^2 - m^2 > 0 \text{에서}$$

$$(m - 1)(3m - 1) > 0, m < \frac{1}{3}, m > 1 \dots \textcircled{\Delta}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta} \text{에서 } m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$$

19. x 에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$ 의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a 의 범위는?

① $a \leq -3$ 또는 $a \geq 1$

② $-3 \leq a \leq 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1) - 1$ 을 전개하여 이항하면 $x^2 + (1-a)x - a + 1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \leq 0$ 이면 부등식의 해가 없다.

$$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \leq 0$$

$$(a-1)(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 1$$

20. 함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최솟값이 -3 일 때, 상수 a 의 값을 정하고,
함수 $y = ax^2 - 2x + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$

② 최댓값 $\frac{3}{2}$

③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$

④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$

⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$$y = (x - 1)^2 + a - 1 \text{ 이므로}$$

$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.

$$a - 1 = -3 \quad \therefore a = -2$$

$$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, 최댓값 } \frac{3}{2}$$

21. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$

② $\frac{29}{4}$

③ $\frac{31}{4}$

④ $\frac{33}{4}$

⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$$

$$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow \text{최솟값} : \frac{31}{4}$$

22. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

23. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -81

② -45

③ 0

④ 5

⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3 + a)x + 1 - b = 0$ 의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + 5 = \frac{3 + a}{2}, \quad 1 \times 5 = \frac{1 - b}{2}$$

$$\therefore a = 9, \quad b = -9$$

$$\therefore ab = -81$$

24. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와 직선 $y = x + 3a$ 가 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$

② $-12 < a < 2$

③ $-11 < a < 1$

④ $-11 < a < 2$

⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와
직선 $y = x + 3a$ 는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a - 1)x + 3 - 3a = 0$ 에서
 $D = (a - 1)^2 - 4(3 - 3a) < 0$
 $a^2 + 10a - 11 < 0, (a + 11)(a - 1) < 0$
 $\therefore -11 < a < 1$

25. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = x^2 + ax + a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 y 를 소거하여 정리하면

$$x^2 + ax + a = x + 1$$

$$\therefore x^2 + (a-1)x + a-1 = 0$$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$$

$$\therefore (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$$

$$\therefore (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } 5$$

따라서 구하는 a 의 값은 6

26. 직선 $y = mx - 1$ 은 곡선 $y = x^2 + x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$ 와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m 의 값의 범위는?

① $1 < m < 3$

② $-1 < m < 3$

③ $-1 < m < 1$

④ $-3 < m < 1$

⑤ $-3 < m < -1$

해설

(i) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가

서로 다른 두 점에서 만나므로

이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라하면

$$D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0 \text{에서 } m^2 - 2m - 3 > 0$$

$$\therefore m < -1 \text{ 또는 } m > 3 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

(ii) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 - x$ 는 만나지 않으므로

이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0 \text{에서 } m^2 + 2m - 3 < 0$$

$$\therefore -3 < m < 1 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

따라서 $\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}$ 의 공통범위를 구하면

$$-3 < m < -1$$

27. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 0, a > 1$

② $0 < a < 1$

③ $a < 1, a > 2$

④ $1 < a < 2$

⑤ $a < -1, a > 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가
 x 축과 만나지 않으면

판별식 D 가 $D < 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - a < 0, a(a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

28. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$

③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$

④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$

⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x 에 대하여

$$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 이 항상 성립하여야 한다.

따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$ 의 판별식 $D < 0$ 이어야 한다.

$$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$$

$$(m+2)(3m-2) > 0$$

$$\therefore m < -2 \text{ 또는 } m > \frac{2}{3}$$

29. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1, \quad y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

① $m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \quad m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2, \quad m > 2$

④ $m < 2, \quad m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5, \quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을 항상 만족하도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서

판별식 $D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0, (m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
 $(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

$y = x + 1 \dots\dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

㉡의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 ㉠의 그래프는 m 의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.

이를테면 $m = 0, m = 1$ 일 경우에 대해서 생각해 보자.

(i) $m = 0$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 - x + 1$ 이므로

이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 위에 있는 x 의 범위는 부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$ 을 만족하는 x 의 범위와 같다.

(ii) $m = 1$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 + 2$ 이므로

이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위에 있으므로 ㉠이 ㉡보다 항상 위에 있는 x 의 범위는 x 의 모든 실수값이다.

이 문제의 경우는 (ii)같이 되도록 m 의 범위를 정하라는 것이다.

㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

곧, $x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 이 x 의 모든 실수값에 대하여 항상 성립하면 된다.

이 결과는 ㉠, ㉡의 그래프가 만나지 않도록 m 의 범위를 정한 것과 같다.

그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로

‘포물선이 직선보다 위쪽에 있다’는 것과 ‘포물선과 직선이 만나지 않는다’는 것과는 그 뜻이 다르다.

30. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위한 정수 k 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k 값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

31. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$$

$$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5} \text{ 에서 } |\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

32. 제 4항이 6, 제 7항이 162 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$

② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$

③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$

④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$

⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

33. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

34. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$$\therefore a_{15} = 15 \times 16 = 240$$

35. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64

② 80

③ 92

④ 100

⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

36. 등차수열 10, a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$, a_{99} , -390 에서 공차는?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$b_1 = 10, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \cdots,$$

$$b_{100} = a_{99}, b_{101} = -390$$

$$\therefore b_{101} = 10 + (101 - 1) \cdot d = -390$$

$$100d = -400$$

$$\therefore d = -4$$

37. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$

② x 는 모든 실수

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$(x - 3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

38. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k, y = k^2 + k + 2$

② $x = k, y = k^2 - 3k + 4$

③ $x = 2k, y = k^2 + 4k + 1$

④ $x = 2k, y = k^2 - 5k + 7$

⑤ $x = 3k, y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
 $= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
 $x = 2k, y = k^2 - 5k + 7$

39. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$ 이어야 한다.

$$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k+1 = \pm 4$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

40. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와
 x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

41. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27

② 10, 23, 29

③ 11, 23, 27

④ 11, 23, 29

⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2} = 11$, 이 수열의 공차는 6이다.

따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

42. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = -6n + 7$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -1, d = 5$

② $a = -1, d = 6$

③ $a = 1, d = -5$

④ $a = 1, d = -6$

⑤ $a = 2, d = 7$

해설

$$a_n = -6n + 7 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -6 \cdot 1 + 7 = 1,$$

$$a_2 = -6 \cdot 2 + 7 = -5 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = -6$$