1. 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 y 축 위에서 만나고, 점 $(5,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{5}x - 2$ ② $y = \frac{3}{5}x - 3$ ③ $y = x - 4$
④ $y = \frac{7}{5}x - 5$ ⑤ $y = \frac{9}{5}x - 6$

해설

$y = ax - 5$
점 $(5,\ 2)$ 를 지나므로
$2 = 5a - 5$
$\therefore a = \frac{7}{5}$
$\therefore y = \frac{7}{5}x - 5$

2. 일차함수 $y = 5x - 1$ 의 그래프와 y 축 위에서 만나고, 점 $(-4, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = \frac{1}{2}x - 1$

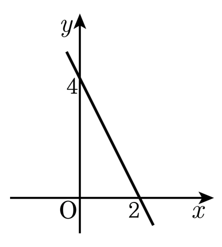
해설

$y = ax - 1$ 가 점 $(-4, -3)$ 을 지나므로

$-3 = -4a - 1, \quad 4a = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{2}x - 1$

3. 다음 그림은 일차함수 $y = ax+b$의 그래프이다. 이 그래프와 일차함수 $nx + y = -1$의 그래프가 서로 평행할 때, n의 값을 구하여라.



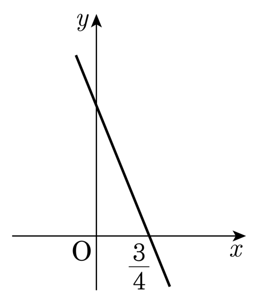
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 직선은 y절편이 4이므로 $y = ax + 4$,
또 두 점 $(0, 4)$, $(2,\ 0)$을 지나므로
기울기 $a = \dfrac{0-4}{2-0} = -2$
따라서 $y = -2x + 4$이다.
한편 $nx + y = -1$을 y에 관해 풀면
$y = -nx - 1$이다.
일차함수 $y = -2x+4$와 $y = -nx-1$ 의 그래프가 서로 평행하면
기울기가 같으므로 $-n = -2$
따라서 $n = 2$이다.

4. 일차방정식 $4x+3y-2a=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$4x+3y-2a=0$ 이 점 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$ 을 지나므로 $4\times\frac{3}{4}-2a=0$,

$-2a=-3$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

5. 직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$ 과 수직으로 만나는 두 개의 직선 l 과 m 이 있다. 이 두 개의 직선 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때 선분 PQ 의 중점은 $(3,\ 5)$ 이고 직선 l 의 y 절편의 y 좌표와 직선 m 의 x 절편의 x 좌표가 같다. 점 P 와 점 Q 의 x 좌표의 차이와 y 좌표의 차이가 같을 때, 직선 PQ 와 평행하고 점 $(1,\ -4)$ 를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y=x-5$

해설

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$ 과 수직으로 만나는 직선은 기울기가 2 이므로
두 개의 직선 l 과 m 의 방정식을 각각 $y=2x+a$, $y=2x+b$ 라 놓을 수 있다.
두 개의 직선위에 있는 점 P 와 점 Q 의 x 좌표를 각각 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$P(x_1,\ 2x_1+a),\ Q(x_2,\ 2x_2+b)$ 이고 선분 PQ 의 중점이 $(3,\ 5)$ 이므로
$\frac{x_1+x_2}{2}=3,\ \frac{2x_1+a+2x_2+b}{2}=5$
$x_1+x_2=6,\ 2(x_1+x_2)+a+b=10$
$\therefore a+b=-2\cdots$ ①
직선 l 의 y 절편의 y 좌표와 직선 m 의 x 절편의 x 좌표가 같으므로
직선 $y=2x+b$ 는 $(a,\ 0)$ 을 지난다.
$0=2a+b,\ b=-2a\cdots$ ②
② 를 ① 에 대입하면 $a-2a=-2$ 이다.
$\therefore a=2,\ b=-4$
직선 l 의 방정식은 $y=2x+2$ 이고 직선 m 의 방정식은 $y=2x-4$ 이다.
점 P 와 점 Q 의 x 좌표의 차이와 y 좌표의 차이가 같으므로
$x_2-x_1=2x_2-4-2x_1-2,\ x_2-x_1=2(x_2-x_1)-6$
$\therefore x_2-x_1=6$
직선PQ 의 기울기가 $\frac{2x_2-4-2x_1-2}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2-x_1)-6}{x_2-x_1}$ 이고
$x_2-x_1=6$ 이므로
직선 PQ 의 기울기는 1 이다.
따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y-(-4)=1\times(x-1)$ 이다.
$\therefore y=x-5$

6. 직선 $y = 3x$ 위의 한 점 P 에서 y 축까지의 거리를 a , 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 위의 한 점 Q 에서 x 축까지의 거리를 b 라고 할 때, $a = b$ 인 두 점 P, Q 에 대하여 직선 PQ 와 수직으로 만나는 직선 중 점 $(-4,\ -1)$ 을 지나는 일차함수의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x + 3$

해설

직선 $y = 3x$ 위의 한 점 P 에서 y 축까지의 거리를 a 라 하면 점 P 의 x 좌표는 a 이고, y 좌표는 $3a$ 이다.

직선 $y = \frac{1}{3}x$ 위의 한 점 Q 에서 x 축까지의 거리를 b 라 하면 점 Q 의 y 좌표는 b 이고 x 좌표는 $3b$ 이므로

$\mathrm{P}(a,\ 3a)$ 와 $\mathrm{Q}(3b,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{b-3a}{3b-a}$ 인데, $a = b$ 이므로 -1 이다.

따라서 직선 PQ 와 수직으로 만나는 직선의 기울기는 1 이고, 이 직선이 $(-4,\ -1)$ 을 지나므로 $y + 1 = x + 4$ 이다.

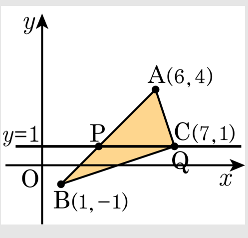
$\therefore y = x + 3$

7. 세 점 A(6, 4), B(1, −1), C(7, 1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. x 축에 평행한 직선이 삼각형 ABC 와 두 점 PQ 에서 만난다고 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 Q 는 점 C 와 같아야 한다.
즉, x 축과 평행한 직선의 그래프는 $y = 1$ 이고,
점 P 의 좌표는 직선 AB 와 $y = 1$ 의 교점이다.
직선 AB 의 그래프는 (6, 4) 와 (1, −1) 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로
$y + 1 = \frac{4+1}{6-1}(x - 1) \qquad \therefore\ y = x - 2$
$y = x - 2$ 와 $y = 1$ 의 교점의 좌표는 P(3, 1)
따라서 선분 PQ 의 길이의 최댓값은 $7 - 3 = 4$ 이다.

8. 직선 $y=3$ 과 수직으로 만나고 $(-1,\ 5)$ 를 지나는 직선의 그래프가 $(a-3)x+(2b+2)y-4=0$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=3$ 과 수직으로 만나려면 주어진 일차방정식의 y 계수가 0 이 되어야 하고 $(-1,\ 5)$ 를 지나므로
$2b+2=0 \qquad \therefore\ b=-1$
$(a-3)(-1)-4=0 \qquad \therefore\ a=-1$
$\therefore\ a-b=0$