1. 세호네 반 학생 30 명의 몸무게의 총합은 2100 , 몸무게의 제곱의 총합은 150000 일 때, 세호네 반 학생 몸무게의 표준편차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$(\text{분산}) = \frac{\{(\text{변량})^2 \text{ 의 총 합}\}}{\text{변량의 총 개수}} - (\text{평균})^2$$

$\frac{150000}{30} - 70^2 = 100$, 즉 분산은 100 이다.

따라서 표준편차는 10 이다.

2. 다음 조건을 만족하는 50 개의 변량 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{48}, x_{49}, x_{50} 의 분산을 구하여라.

㉠ $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{48} + x_{49} + x_{50} = 100$
㉡ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{48}^2 + x_{49}^2 + x_{50}^2 = 800$

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{48} + x_{49} + x_{50} = 100$ 이므로 평균은

$\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{48} + x_{49} + x_{50}}{50} = \dfrac{100}{50} = 2$

이므로 각 변량에 대한 편차는 $x_1 - 2$, $x_2 - 2$, $x_3 - 2$, $\cdots$, $x_{48} - 2$, $x_{49} - 2$, $x_{50} - 2$ 이다.

따라서 분산은

$\dfrac{1}{50}\{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + \cdots + (x_{48} - 2)^2 + (x_{49} - 2)^2 + (x_{50} - 2)^2\}$

$= \dfrac{1}{50}\{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{48}^2 + x_{49}^2 + x_{50}^2) - 4(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{48} + x_{49} + x_{50}) + 4 \times 50\}$

$= \dfrac{800 - 4 \times 100 + 4 \times 50}{50} = 12$ 이다.

3. x, y, z의 평균이 5이고 분산이 2일 때, 세 수 x^2, y^2, z^2의 평균은?

① 20 ② 23 ③ 24 ④ 26 ⑤ 27

해설

세 수 x, y, z의 평균이 8이므로

$\frac{x+y+z}{3} = 5$

$\therefore x+y+z = 15 \cdots ㉠$

또, 분산이 2이므로 $\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3} = 2$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 = 6$

$\therefore x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75 = 6$

위 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10(15)+75 = 6$

$x^2+y^2+z^2 = 81$

따라서 $x^2+y^2+z^2$의 평균은 $\frac{81}{3} = 27$이다.

4. 다음 표는 S 중학교 5 개의 학급에 대한 학생들의 미술 실기 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	77	77	73	70	82
표준편차	2.2	$2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② 고득점자는 A 학급보다 B 학급이 더 많다.

③ B 의 표준편차가 A 의 표준편차보다 크므로 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 B 이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 A 학급의 학생의 성적보다 낮은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.2=\sqrt{4.84}$	$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{2.5}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

③ 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 더 집중된다. 따라서 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 A 이다.

5. 세 개의 변량 $a,\ b,\ c$ 의 평균을 M , 표준편차를 S 라고 할 때, $a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① $M,\ S^2$ ② $M,\ S^2+1$

③ $M+1,\ S^2$ ④ $M+1,\ S^2+1$

⑤ $M+1,\ (S+1)^2$

해설

세 개의 변량 $a,\ b,\ c$ 의 평균과 분산이 각각 M , S^2 이므로

$M=\dfrac{a+b+c}{3}$

$S^2=\dfrac{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2}{3}$

$a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균을 M_1 과 분산을 S_1^2 이라고 하면

$M_1=\dfrac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3}$

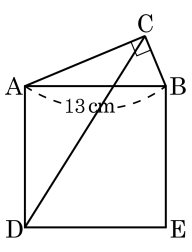
$=\dfrac{(a+b+c)+3}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}+1=M+1$

$S_1^2=\dfrac{1}{3}\{(a+1-M-1)^2+(b+1-M-1)^2+(c+1-M-1)^2\}$

$=\dfrac{1}{3}\{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2\}=S^2$

따라서 $a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균과 분산은 각각 $M+1,\ S^2$ 이다.

6. 다음 그림은 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 변 $\overline{AB}$ 를 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. $\overline{AB} = 13\,\text{cm}$, $\triangle ACD = 72\,\text{cm}^2$ 일 때, $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는?



① $21\,\text{cm}^2$ ② $22\,\text{cm}^2$ ③ $25\,\text{cm}^2$
④ $30\,\text{cm}^2$ ⑤ $40\,\text{cm}^2$

해설

$\triangle ACD$ 는 $\overline{AC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\overline{AC}$ 를 한 변으로 가지는 정사각형의 넓이는 $144\,\text{cm}^2$ 이다.
또, $\square ADEB = 13^2 = 169\ (\text{cm}^2)$ 이므로 $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는
$169 - 144 = 25\ (\text{cm}^2)$ 이다.

7. 빗변의 길이가 m^2+n^2 이고, 다른 한 변의 길이가 m^2-n^2 인 직각삼각형의 나머지 한 변의 길이는? (단, $m>0$, $n>0$)

① $m+n$ ② $2m+n$ ③ $m+2n$

④ $2(m+n)$ ⑤ $2mn$

해설

나머지 한 변의 길이를 X 라 하면

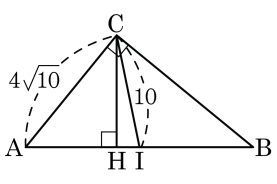
$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+X^2$

$m^4+2m^2n^2+n^4=m^4-2m^2n^2+n^4+X^2$

$X^2=4m^2n^2=(2mn)^2$

$X>0$, $m>0$, $n>0$ 이므로 $X=2mn$ 이다.

8. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 점 I 는 $\overline{AB}$ 의 중점이고, 점 C 에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 빗금 친 부분의 넓이를 구하여라.



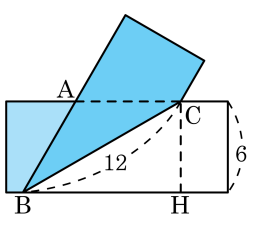
▶ 답:

▷ 정답: $4\sqrt{6}$

해설

점 I 가 직각삼각형 ABC 의 외심이므로
$\overline{AI} = \overline{BI} = 10$ 이다.
$\overline{AH} = x$ 라고 하고, 닮은 삼각형의 성질을 이용하면 $20x = \left(4\sqrt{10}\right)^2 = 160$ 이므로 $x = 8$ 이다.
$\triangle CAH$ 에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{CH} = \sqrt{160 - 64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}, \overline{HI} = 2$
$\therefore \triangle CHI = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 2 = 4\sqrt{6}$

9. 폭이 6 인 종이테이프를 접었더니 접은 선이 12 였다. 테이프가 겹쳐진 부분 △ABC 의 넓이를 $a\sqrt{b}$ 라고 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.(단, b는 최소의 자연수)



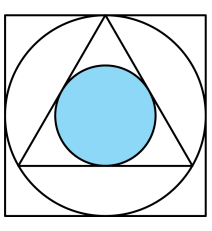
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{BH} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = x$ 라 하면,
$x^2 = 6^2 + (6\sqrt{3} - x)^2$
$12\sqrt{3}x = 144$
$\therefore\ x = 4\sqrt{3}$
$\therefore\ \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$

10. 다음 그림과 같이 정사각형에 내접한 원에 정삼각형이 내접하고 있고, 정삼각형 안에 원이 또 내접하고 있다. 정사각형의 넓이가 18 일 때, 작은 원의 넓이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $\frac{9}{8}\pi$

해설

큰 원의 지름의 길이는 정사각형의 한 변의 길이이므로

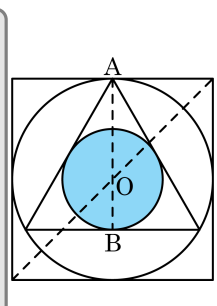
(큰 원의 지름의 길이) $= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

이 때, 점 O 는 정삼각형의 무게중심이므로

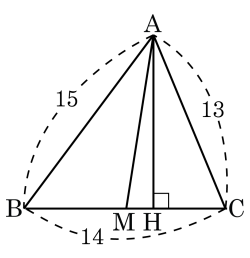
$\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AO} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

따라서 작은 원의 넓이는 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi = \frac{9}{8}\pi$

이다.



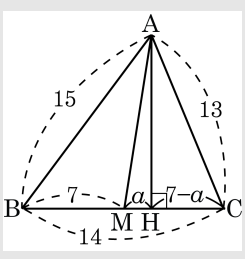
11. 다음 그림의 삼각형 ABC 에서 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 점 M 은 $\overline{BC}$ 의 중점일 때, $\overline{AH} - \overline{MH}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설



$\overline{MH} = a$ 라 할 때,

$15^2 - (7+a)^2 = 13^2 - (7-a)^2$

$225 - (49 + 14a + a^2) = 169 - (49 - 14a + a^2)$, $28a = 56$, $a = 2$

따라서 $\overline{MH} = a = 2$, $\overline{AH} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

이므로 $\overline{AH} - \overline{MH} = 10$

12. 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x+2y+1$　② $x+y-3$　③ $2x+3y+2$

④ $x+y-2$　⑤ $2x+3y-1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)$
$=(x+y-2)(x+2y+1)$

13. $[a,\ b,\ c] = a(b^2 - c^2)$일 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$의 인수인 것은?

① $a - b$　② $b + c$　③ $c + a$

④ $a + b + c$　⑤ abc

해설

$$\begin{aligned}
&[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b] \\
&= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2 \\
&= a^2(c - b) - a(c^2 - b^2) + bc(c - b) \\
&= (c - b)\{a^2 - a(c + b) + bc\} \\
&= (c - b)(a - b)(a - c)
\end{aligned}$$