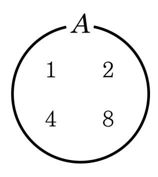
1. 다음 그림의 집합 A 를 조건제시법으로 나타내면?



① $\{x \mid x$는 2의 배수$\}$
② $\{x \mid x$는 4의 배수$\}$
③ $\{x \mid x$는 8의 배수$\}$
④ $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10의 약수$\}$

해설
$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 조건제시법으로 나타내면 $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개 ② 11 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

3. 1 부터 30 까지의 자연수 중 3 의 배수이지만 4 의 배수가 아닌 수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$n(A) = 10, n(B) = 7, n(A \cap B) = 2$ 이다.
따라서 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 10 - 2 = 8$

4. n이 자연수 일 때, 2^{10n}, 1000^n 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$　② $2^{10n} \le 1000^n$　③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \ge 1000^n$　⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

5. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1,\ f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ 로 놓으면,
$f(1) = -1,\ f(2) = 3$ 이므로
$f(1) = a + b = -1,\ f(2) = 2a + b = 3$
즉, $a = 4,\ b = -5$
$\therefore\ f(x) = 4x - 5$
$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
$4a - 5 = 1 \quad \therefore\ a = \dfrac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \dfrac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

6. $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$, $g(x) = x + c$라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$가 성립한다. 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$(f \circ g)(x) = f(x+c) = a(x+c) + b = ax + ac + b$

$\therefore\ a = 2 \cdots$ ㉠

$ac + b = -3 \cdots$ ㉡

$f^{-1}(3) = -2$이므로, $f(-2) = 3$

$\therefore\ -2a + b = 3 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\therefore a = 2,\ b = 7,\ c = -5$

7. $3x = 2y$일 때, $\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$의 값은?

① $\dfrac{15}{7}$ ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{19}{9}$ ④ $\dfrac{21}{10}$ ⑤ $\dfrac{23}{11}$

해설

$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{2}x$

$\therefore \dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \dfrac{3x^2 + \dfrac{9}{4}x^2}{x^2 + \dfrac{3}{2}x^2} = \dfrac{\dfrac{21}{4}}{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{21}{10}$

8. 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x=\dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy+2x=ay$

$\therefore y=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2}=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a=-2$

9. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 집합 $\{1\}$ 과 서로소인 집합은 모두 몇 개 인가?

① 3 개 ② 4 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 15 개

해설

1을 포함하지 않는 부분집합 중 공집합을 제외한 것이다.

$\therefore 2^3 - 1 = 7$(개)

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A\cap B = B$　② $A\cap B^c = B$　③ $A\cup B = U$
④ $A - B = \varnothing$　⑤ $B - A = U$

해설

$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$
$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\}\cap B$
$=\{A\cap(B\cup B^c)\}\cap B = A\cap B = A$
$A\subset B$ 이므로 $A\cap B^c=\varnothing$ 이면
$A\subset B$ 이므로 필요충분조건은 ④이다.

11. $a > 0, b > 0$일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) = ab+4+1+\frac{4}{ab}$

ab와 $\frac{4}{ab}$가 양수이므로

$ab+\frac{4}{ab} \geq 2\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}} = 4$

$\therefore ab+\frac{4}{ab}+5 \geq 4+5 = 9$

12. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$이고 $f(1)=1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$가 성립하므로,
$x=1$, $y=0$을 대입하면
$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$\therefore\ f(0)=f(1)+f(1)=2$

13. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=2x+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a-b$ 의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로
$f(0)=b,\ g(0)=1$에서 $b=1$
$f(1)=1+a+b,\ g(1)=3$에서 $a+b=2$
$\therefore a=1$
$\therefore a-b=0$

14. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

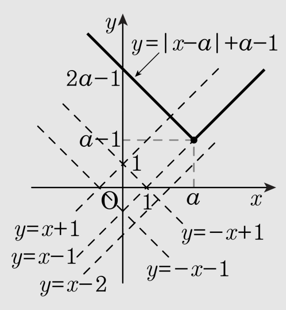
① $y=x+1$　　② $y=x-1$　　③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$　　⑤ $y=-x+1$

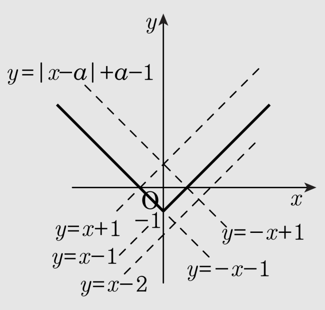
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

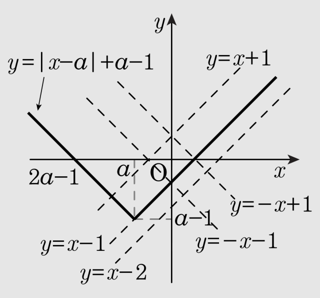
ⅰ) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ⅱ) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅲ) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

15. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k의 값은?

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

① -1　② -5　③ -8　④ -10　⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y = \frac{z}{2} & \cdots ① \\ 2y+z = \frac{3}{4}z & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② 하면

$x-z = -\frac{1}{4}z,\ x = \frac{3}{4}z,\ y = -\frac{1}{8}z$

$$\frac{x+8y-z}{k} = \frac{\frac{3}{4}z-z-z}{k} = \frac{-\frac{5}{4}z}{k} = \frac{z}{4}$$

$\therefore k = -5$

해설

가비의 리에 따라

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{6y+3z}{3\times 3} = \frac{-4z}{4\times(-4)}$$

$$= \frac{x+8y-z}{2+9-16} = \frac{x+8y-z}{-5}$$

$\therefore\ k = -5$

16. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$

$=|a+1|+|a-3|=(a+1)-(a-3)=4$

17. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

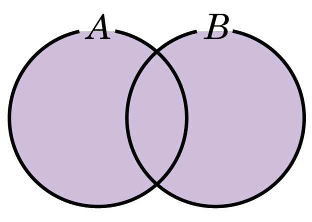
해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.
따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$
$\therefore a = -11$
또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로
$m = \sqrt{3-2\times 1}+1 = 2$
$\therefore m-a = 13$

18. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.

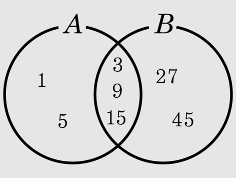


▶ 답 :

▷ 정답 : 105

해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B = \{3,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
따라서 모든 원소의 합은
$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 = 105$ 이다.

19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 세 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ 에서 $A \bigstar B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 할 때, 집합 $(A \bigstar B) \bigstar C$ 의 원소의 합을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$A \bigstar B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 4\}$

$$\begin{aligned} \{1, 2, 4\} \bigstar C &= (\{1, 2, 4\} - C) \cup (C - \{1, 2, 4\}) \\ &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

$\therefore (A \bigstar B) \bigstar C = \{4, 5\}$

20. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3　　② 3.5　　③ 4　　④ 4.5　　⑤ 5

해설

B$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이므로
△OBC의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$ ㉠
직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$
$\therefore\ S\geq 4$

21. 서로소인 두 자연수 m, $n(m > n)$에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$을 나타낼 때, $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$$\frac{151}{87} = 1 + \frac{64}{87} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{87}{64}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{23}{64}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{64}{23}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{18}{23}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{18}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{18}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{5}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$\therefore a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 3$ 이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

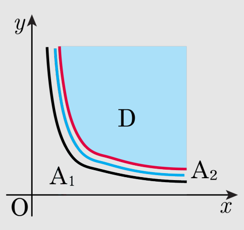
22. 임의의 n (n 은 자연수)에 대해 집합 $A_n = \{(x,\ y) \mid y = \frac{n}{x},\ x > 0,\ y > 0\}$ 이 정의되어 있다. 부등식 $y \geq \frac{7}{3x}$ $(x > 0,\ y > 0)$의 영역을 D라 할 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $A_1 \cap D = \varnothing$ ② $A_2 \subset D$ ③ $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

④ $A_3 \subset D$ ⑤ $(A_3 \cup A_4) \subset D$

해설

$y = \frac{n}{x}(x > 0,\ y > 0)$에서 n이 커지면 곡선이 더 위로 올라간다.



$y = \frac{7}{3x} \Rightarrow y = \frac{\frac{7}{3}}{x}$

부등식 $y \geq \frac{7}{3x}(x > 0.\ y > 0)$의 영역은 $y = \frac{\frac{7}{3}}{x}$의 윗부분이다.

$A_1,\ A_2$는 영역 D아래에 위치하므로 만나지 않으므로, ①은 참, ②는 거짓

23. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \le x \le 5n+1\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \ne \varnothing$가 성립하는 자연수 n의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A_1 = \{x|1 \le x \le 6\}$

$A_n = \{x|2n-1 \le x \le 5n+1\}$

$\therefore 2n-1 \le 6 \Rightarrow n \le \dfrac{7}{2}$

따라서 자연수 n의 최댓값은 3

해설

$A_1 = \{x \mid 1 \le x \le 6\}$, $A_2 = \{x \mid 3 \le x \le 11\}$, $A_3 = \{x \mid 5 \le x \le 16\}$, $A_4 = \{x \mid 7 \le x \le 21\}$ 이상에서 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$

$\therefore$ n의 최댓값은 3

24. $A=\{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x)=x^2-2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2-2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A=\{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a=2$

25. 대열의 길이가 5 km 인 부대가 일정한 속도로 걸어서 이동하고 있다. 이 때 부대의 맨 끝에서 말을 타고 있던 전령이 이 부대의 맨 앞에 있는 장군에게 긴급히 전해줄 편지가 있었다. 이 전령은 말을 타고 일정한 속도로 부대가 이동하는 방향을 따라 신속히 부대의 맨 앞의 장군에게 편지를 전해주고 바로 반대 방향으로 이동해 부대의 맨 끝으로 왔다. 그 동안에 대열 전체는 5 km 를 이동했다고 할 때, 이 전령이 움직인 거리는? (단, $\sqrt{2} = 1.414$)

① 약 10.4 km ② 약 11.5 km ③ 약 12.1 km

④ 약 12.6 km ⑤ 약 13.2 km

해설

부대의 이동 속도를 1, 전령의 이동 속도를 v
전령이 부대 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간을 t_1
부대 뒤로 되돌아오는데 걸리는 시간은 t_2 라 하면

$$\begin{cases} vt_1 = 5 + 1 \cdot t_1 \cdots ㉠ \\ vt_2 = 5 - 1 \cdot t_2 \cdots ㉡ \\ 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = 5 \end{cases}$$

㉠ − ㉡에서 $v(t_1 - t_2) = t_1 + t_2 = 5 \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡에서 $v(t_1 + t_2) = 10 + (t_1 - t_2)$
$\therefore 5v = 10 + (t_1 - t_2) \cdots$ ㉣($\because$㉢에서)
㉢, ㉣에서 $v(5v - 10) = 5$
$v^2 - 2v - 1 = 0,\ v = 1 + \sqrt{2}(\because v > 1)$
(전령이 움직인 거리) $= v(t_1 + t_2)$
$= 5(1 + \sqrt{2})$
$= 5 \times 1 + 5 \times 2.414$
$= 12.07$
따라서 약 12.1km 를 전령이 움직였다.

해설

부대의 이동 속도를 a, 전령의 이동 속도를 b 라 하면
부대가 5 km 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{a}$
전령이 부대의 맨 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b-a}$
전령이 부대의 맨 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b+a}$ 이다.
$\frac{5}{b-a} + \frac{5}{b+a} = \frac{5}{a}$ 에서
$b = (1 + \sqrt{2})a$
$\therefore$(전령이 움직인 거리)$= (1 + \sqrt{2})a \cdot \frac{5}{a} \fallingdotseq 5 \times 2.414 = 12.07$
따라서 약 12.1km 를 전령이 움직였다.