

1. 어느 학급의 학생 중 수영반에 들어 있는 학생이 20 명, 배드민턴반에 들어 있는 학생이 18 명, 수영반과 배드민턴반에 모두 들어 있는 학생이 6 명이다. 이때, 수영반이나 배드민턴반에 들어있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 32 명

해설

수영반에 들어 있는 학생을 집합을 A 라 하고, 배드민턴반에 들어 있는 학생을 집합 B 라고 하자.
수영반과 배드민턴반 모두 들어 있는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 6$ 이다.
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $x = 20 + 18 - 6$
 $x = 32$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 짝수}\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ 일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\} = B - A$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B - A =$$

$$\{1, 3, 5\}$$

$$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$$

3. $(A - B) \cup (A \cap B)$ 를 간단히 하면?

- ① A ② B ③ A^c ④ B^c ⑤ $\emptyset$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

4. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$$

$$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$$

$$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$$

$$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$$

$$4x - 3 = 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$$g(4x - 3) = x \text{ 의 양변에 } x = 1 \text{ 을 대입하면 } g(1) = 1$$

5. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

6. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

7. $2x = 3y$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은? (단, $xy \neq 0$)

① $\frac{1}{3}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{2}{5}$

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$2x = 3y \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \rightarrow x = 3k, y = 2k$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{(3k)^2 - (2k)^2}{(3k)^2 + 3k \times 2k} = \frac{5k^2}{15k^2} = \frac{1}{3}$$

8. $1 < a < 4$ 일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$ 의 값을 구하여라.

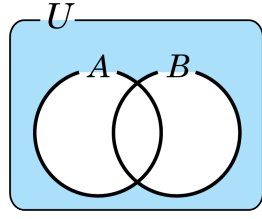
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a-4)^2} + |a-1| \\ &= |a-4| + |a-1| \\ &= -a + 4 + a - 1 = 3 \end{aligned}$$

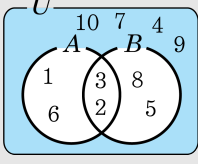
10. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, B = \{2, 3, 5, 8\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의
색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{2, 3, 4\}$ ② $\{2, 5, 6\}$ ③ $\{4, 5, 6\}$
④ $\{4, 7, 8, 9\}$ ⑤ $\{4, 7, 9, 10\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로



색칠한 부분은 $\{4, 7, 9, 10\}$ 이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- $\neg A \cup A^c = U$
- $\supset (A^c)^c = A^c$
- $\ominus \varnothing^c = U$
- $\ominus A \cap B^c = B - A$
- $\ominus U^c = B$

- ① $\neg, \supset$

② $\neg, \ominus$

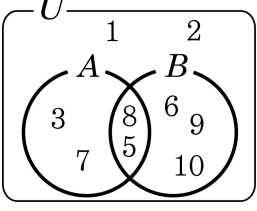
③ $\neg, \ominus$

④ $\neg, \supset, \ominus$

해설

- $\supset (A^c)^c = A$
- $\ominus A \cap B^c = A - B$
- $\ominus U^c = \varnothing$

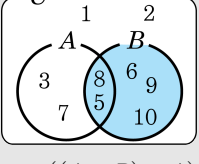
12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



- ① $n(U) = 9$
- ② $n(A \cap B^c) = 2$
- ③ $n((A \cup B) - A) = 2$
- ④ $n(B - A) = 3$
- ⑤ $n(A^c) = 5$

해설

③ $(A \cup B) - A$ 를 색칠하면 다음과 같다.



$\therefore n((A \cup B) - A) = 3$

13. a, b 가 실수일 때, p 가 q 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0, q : |a| + |b| = 0$

② $p : a = 0, q : |a + b| = |a - b|$

③ $p : |a| = |b|, q : a^2 = b^2$

④ $p : a + b > 0, ab > 0, q : a > 0, b > 0$

⑤ $p : |a| + |b| > |a + b|, q : ab < 0$

해설

$q : |a + b| = |a - b| \rightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$

14. 다음 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 5$, $q : x \geq a$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$ 를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$ 따라서 a 의 최댓값은 2

15. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

16. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 $(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a})$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a}) = 144a^2 + \frac{1}{a^2} + 30 \geq 2\sqrt{144a^2 \times \frac{1}{a^2}} + 30 = 30 + 24 = 54$$

17. 함수 $f : x \rightarrow ax + b$ 이고 $f(0) = -3$, $\{f(1) + 1\}^2 = 4$ 일 때 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = ax + b \text{ 에서 } f(0) = b = -3$$

$$f(1) = a + b = a - 3, \{f(1) + 1\}^2 = (a - 3 + 1)^2 = 4$$

$$(a - 2)^2 = 4$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } 4$$

$$\therefore a \neq 0 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$\therefore a + b = 4 + (-3) = 1$$

18. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에

대응하는 것은 2개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$

$= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

19. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

20. 함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 대하여 $g(3x-1) = f(x)$ 을 항상 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$
③ $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
⑤ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

② $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$
④ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

해설

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ 에서 } f(x) = 2x + 3$$

$$g(3x-1) = f(x) \text{ 에서 } g(3x-1) = 2x + 3$$

$$3x-1 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t+1}{3} \text{ 이므로}$$

$$g(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right) + 3, \quad g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

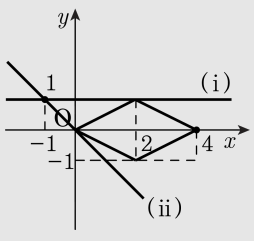
(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.



22. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

23. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\frac{x}{a+b}$
④ $\frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{x}$
⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

③ $x(a+b)$

해설

$$\frac{\frac{2x}{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}}}{\frac{2x}{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

24. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2 \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

25. $x = a + \frac{1}{a}$ 일 때, $\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-4}+x}$ 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 1$)

① $\frac{a^2}{2(a^2+1)}$

② $\frac{2}{a^2+1}$

③ $\frac{a^2+1}{2}$

④ $\frac{a^2+1}{2a^2}$

⑤ $\frac{a}{2(a^2+1)}$

해설

$$x^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$x^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = -a + \frac{1}{a} (\because 0 < a < 1)$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{1}{x(\sqrt{x^2 - 4} + x)}$$

$$= \frac{1}{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left\{ \left(-a + \frac{1}{a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) \right\}}$$

$$= \frac{1}{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(\frac{2}{a}\right)} = \frac{a^2}{2(a^2 + 1)}$$