1. 어느 학급의 학생 중 수영반에 들어 있는 학생이 20 명, 배드민턴반에 들어 있는 학생이 18 명, 수영반과 배드민턴반에 모두 들어 있는 학생이 6 명이다. 이때, 수영반이나 배드민턴반에 들어있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 32 명

해설

수영반에 들어 있는 학생을 집합을 A 라 하고, 배드민턴반에 들어 있는 학생을 집합 B라고 하자.
수영반과 배드민턴반 모두 들어 있는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 6$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$x = 20 + 18 - 6$

$x = 32$

2. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{x \mid x$는 10 미만의 짝수$\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\}$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\} = B - A$

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$이므로 $B - A = \{1,\ 3,\ 5\}$

$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$

3. $(A-B)\cup(A\cap B)$ 를 간단히 하면?

① A ② B ③ A^c ④ B^c ⑤ $\varnothing$

해설

$$\begin{aligned}(A\cap B^c)\cup(A\cap B) &= A\cap(B^c\cup B)\\ &= A\cap U = A\end{aligned}$$

4. $f(x)=2x-3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g\circ f)^{-1}(x)=2x \Leftrightarrow (g\circ f)(2x)=x$

$\Leftrightarrow g(f(2x))=x$

$f(2x)=2\bullet 2x-3=4x-3$

$\therefore g(f(2x))=g(4x-3)=x$

$4x-3=1$ 에서 $x=1$ 이므로

$g(4x-3)=x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1$

5. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6　② -3　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$

$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$이므로 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

6. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$ 이므로 $a+b=15$

7. $2x = 3y$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은? (단, $xy \neq 0$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $-\dfrac{2}{3}$

해설

$$2x = 3y \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \rightarrow x = 3k,\ y = 2k$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{(3k)^2 - (2k)^2}{(3k)^2 + 3k \times 2k} = \frac{5k^2}{15k^2} = \frac{1}{3}$$

8. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$
$= |a-4| + |a-1|$
$= -a + 4 + a - 1 \quad = 3$

9. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 2의 배수$\}$ 에 대하여 $n(X) = 4$ 인 집합 A 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

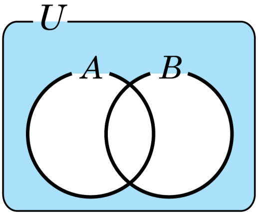
▷ 정답 : 5 개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 4 개 인 부분집합 X 는

$\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$, $\{2, 6, 8, 10\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$ 의 5 개이다.

10. 전체집합 $U = \{x | x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
$A = \{x | x$는 6의 약수$\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

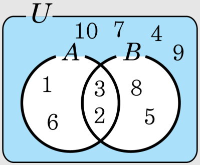


① $\{2, 3, 4\}$ ② $\{2, 5, 6\}$ ③ $\{4, 5, 6\}$

④ $\{4, 7, 8, 9\}$ ⑤ $\{4, 7, 9, 10\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로



색칠한 부분은 $\{4, 7, 9, 10\}$ 이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

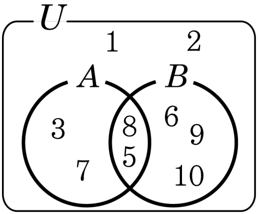
㉠ $A \cup A^c = U$	㉡ $(A^c)^c = A^c$
㉢ $\varnothing^c = U$	㉣ $A \cap B^c = B - A$
㉤ $U^c = B$	

① ㉠, ㉡
② ㉠, ㉢
③ ㉠, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉡ $(A^c)^c = A$
㉣ $A \cap B^c = A - B$
㉤ $U^c = \varnothing$

12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $n(U) = 9$

② $n(A \cap B^c) = 2$

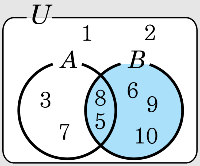
③ $n((A \cup B) - A) = 2$

④ $n(B - A) = 3$

⑤ $n(A^c) = 5$

해설

③ $(A \cup B) - A$ 를 색칠하면 다음과 같다.



$\therefore\ n((A \cup B) - A) = 3$

13. a, b가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① p : $a^2+b^2=0$, q : $|a|+|b|=0$

② p : $a=0$, q : $|a+b|=|a-b|$

③ p : $|a|=|b|$, q : $a^2=b^2$

④ p : $a+b>0$, $ab>0$, q : $a>0$, $b>0$

⑤ p : $|a|+|b|>|a+b|$, q : $ab<0$

해설

q : $|a+b|=|a-b| \rightarrow a=0$ 또는 $b=0$

14. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5$, $q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

15. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^{2}}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

16. 0이 아닌 실수 a에 대하여 $(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a})$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a}) = 144a^2+\frac{1}{a^2}+30 \geq 2\sqrt{144a^2\times\frac{1}{a^2}}+30 =$

$30+24=54$

17. 함수 $f: x \to ax+b$ 이고 $f(0)=-3$, $\{f(1)+1\}^2=4$일 때 $a+b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=ax+b$ 에서 $f(0)=b=-3$

$f(1)=a+b=a-3, \{f(1)+1\}^2=(a-3+1)^2=4$

$(a-2)^2=4$

$\therefore a=0$ 또는 4

$\therefore a \neq 0$이므로 $a=4$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

18. 함수 $f : A \to B$ 에서 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로
$B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 에서 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 $1,\ \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1 개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2 개이어야 한다.
따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$
$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

19. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2(x\geq 1) \\ 1(x<1) \end{cases}$ 에서 $y=(f\circ f)(x)$의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

ⅰ) $x\geq 1: y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$

ⅱ) $x<1: y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore\ y=(f\circ f)(x)=2$

20. 함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 대하여 $g(3x-1) = f(x)$ 을 항상 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

② $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

③ $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

④ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

⑤ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

해설

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에서 $f(x) = 2x + 3$

$g(3x-1) = f(x)$ 에서 $g(3x-1) = 2x + 3$

$3x - 1 = t$ 라 하면 $x = \frac{t+1}{3}$ 이므로

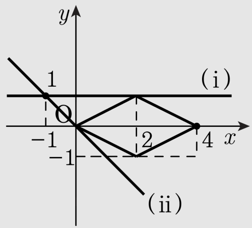
$g(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right) + 3,\ \ g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$

$\therefore\ g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

22. $x+\frac{1}{x}=2$ 일 때, $x^2-\frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=2^2-4=0$$

$$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\times 2=0$$

23. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\dfrac{x}{a+b}$ ② $\dfrac{a+b}{x}$ ③ $x(a+b)$

④ $\dfrac{2ab}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}=\frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

24. $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, $(\sqrt{x}-\sqrt{y})\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

$\therefore\ \sqrt{x}=\sqrt{2}+1$

$y=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ \sqrt{y}=\sqrt{2}-1$

$\therefore$ (준식)$=2\div 2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

25. $x = a + \dfrac{1}{a}$ 일 때, $\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-4}+x}$ 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 1$)

① $\dfrac{a^2}{2(a^2+1)}$ ② $\dfrac{2}{a^2+1}$ ③ $\dfrac{a^2+1}{2}$

④ $\dfrac{a^2+1}{2a^2}$ ⑤ $\dfrac{a}{2(a^2+1)}$

해설

$$x^2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$x^2 - 4 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2-4} = -a + \frac{1}{a}(\because\ 0 < a < 1)$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{1}{x(\sqrt{x^2-4}+x)}$$

$$= \frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left\{\left(-a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{a}\right)} = \frac{a^2}{2(a^2+1)}$$