

1. 집합 $A = \{4, 6, 8\}$ 의 부분집합 중 원소 6 을 반드시 포함하고 원소의 개수가 3 개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

원소 6 를 제외한 $\{4, 8\}$ 의 부분집합은 $\emptyset$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{4, 8\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 6 을 반드시 포함하는 집합 $A = \{4, 6, 8\}$ 의 부분집합에는 $\{6\}$, $\{4, 6\}$, $\{6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 3 개인 것은 $\{4, 6, 8\}$ 이므로 원소의 합은 $4 + 6 + 8 = 18$ 이다.

2. 다음 중 $A \neq B$ 인 것은?

① $A = \{2, 4, 8\}, B = \{8, 2, 4\}$

② $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$

③ $A = \{a, b, c, 3\}, B = \{3, c, b, a\}$

④ $A = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 홀수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하의 홀수}\}$

⑤ $A = \{5, 10, 15, \dots\}, B = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 5 \text{의 배수}\}$

해설

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 5 \text{의 배수}\} \\ &= \{5, 10, 15, \dots, 100\} \neq A \end{aligned}$$

3. 두 집합 $A = \{a - 1, 6, 7\}$, $B = \{a, 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

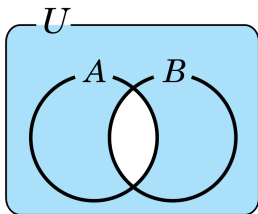
⑤ 5

해설

$4 \in A$ 이므로 $a - 1 = 4$

$\therefore a = 5$

4. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 5, 9\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



① $\{1, 7\}$

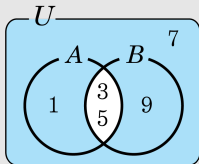
② $\{7, 9\}$

③ $\{5, 9\}$

④ $\{1, 5, 9\}$

⑤ $\{1, 7, 9\}$

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{1, 7, 9\}$ 이다.

5. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{ 이하의 } 3 \text{ 의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$A - B = \{9, 21, 24\}$, $B - A = \{3, 15\}$, $A^c \cap B^c = \{12\}$ 일 때, 집합 A, B 의 교집합을 구하면?

① $\{3, 6\}$

② $\{3, 6, 12\}$

③ $\{3, 18\}$

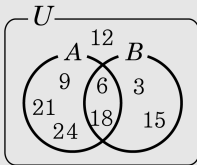
④ $\{6, 12\}$

⑤ $\{6, 18\}$

해설

$$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore A \cap B = \{6, 18\}$$

6. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 집합 $(A^c \cup B^c) \cup B$ 의 모든 원소의 합은?

① 24

② 25

③ 26

④ 27

⑤ 28

해설

$$(A^c \cup B^c) \cup B = (A \cap B)^c \cup B = U$$

따라서, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ 이다.

7. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건

② 필요조건

③ 대우

④ 필요충분조건

⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

8. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

9. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$

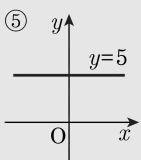
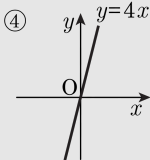
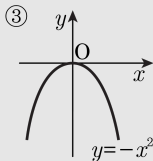
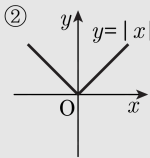
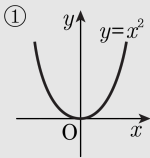
② $f(x) = |x|$

③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$

⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

10. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

$$= 4(3x + 1) + a$$

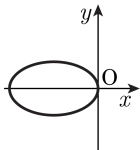
$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

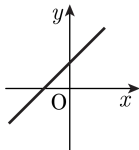
$$\therefore a = 3$$

11. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

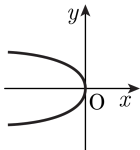
①



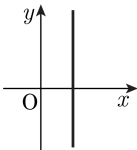
②



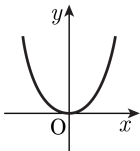
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. $\Rightarrow$ ②

12. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

연립하면 $a = -1, b = 3$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

13. $\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{x}$

② $\frac{2}{x}$

③ $\frac{6}{x(x+6)}$

④ $\frac{2}{x(x+2)}$

⑤ $\frac{2}{x+2}$

해설

이항분리로 푼다.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{x+6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{6}{x(x+6)} \end{aligned}$$

14. 유리수 a, b 에 대하여 $(1 + 2\sqrt{2})a + (-1 + \sqrt{2})b = 5 + 7\sqrt{2}$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -3

해설

$$(1 + 2\sqrt{2})a + (-1 + \sqrt{2})b = 5 + 7\sqrt{2}$$

$$(a - b) + (2a + b)\sqrt{2} = 5 + 7\sqrt{2} \cdots \textcircled{7}$$

a, b 가 유리수이면

$a - b, 2a + b$ 도 유리수이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases}$$

이것을 연립하여 풀면 $a = 4, b = -1$

$$\therefore a + b = 3$$

15. 분수함수 $y = \frac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 이므로

주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2$, $y = -3$ 이다.

$$\therefore 2 + (-3) = -1$$

16. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q 라 하자. $P = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1

② 2

③ 3

④ 6

⑤ 7

해설

$p \rightarrow \sim q$ 의 반례는 $P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.

즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$

$\therefore P \cap Q = \{6\}$

17. 다음 보기 중 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

㉠ $a^2 + b^2 = 0$

㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

㉢ $ab \neq 0$

㉣ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$

㉤ $a^2 + b^2 > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉤

해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.

㉠ $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.

㉢ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.

㉣ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.

㉤ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

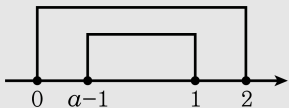
18. $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이고, 필요조건이 $b + 3 \leq x \leq 3$ 이다. a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m + M = -2$

해설

$0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이므로
 $\{x \mid a - 1 \leq x \leq 1\} \subset \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$



위의 그림에서 $0 \leq a - 1 \leq 1$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 필요조건이
 $b + 3 \leq x \leq 3$ 이므로

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\} \subset \{x \mid b + 3 \leq x \leq 3\}$$



위의 그림에서 $b + 3 \leq 0$

$$\therefore b \leq -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 a 의 최솟값 $m = 1$,

㉡에서 b 의 최댓값 $M = -3$

$$\therefore m + M = 1 + (-3) = -2$$

19. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

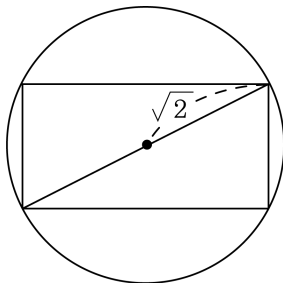
$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

$$\text{이 때 } 2^{50} > 5^{10n} \text{ 이므로 } \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2$$

n 의 갯수는 2 개이다.

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

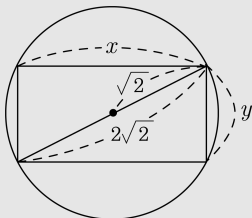
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y ($x > 0, y > 0$) 라고 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

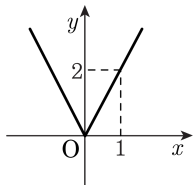
$$(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$$

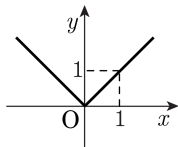
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

21. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

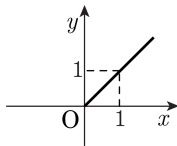
①



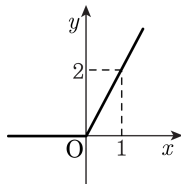
②



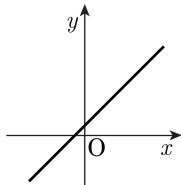
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

22. 다음 중 $\frac{x}{1+x} - \frac{1+x}{x} \div \frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x}$ 를 간단히 나타낸 것은?

① $-1 - 2x$

② $1 - 2x$

③ $1 + 2x$

④ $-1 + 2x$

⑤ $2x$

해설

$$(\text{분자}) = \frac{x^2 - (1+x)^2}{x(x+1)} = \frac{-1-2x}{x(x+1)}$$

$$(\text{분모}) = \frac{x^2 + (1-x)(1+x)}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore \frac{\frac{-1-2x}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x+1)}} = \frac{-1-2x}{x(x+1)} \times x(x+1) = -1-2x$$

23. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ 를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow x+y=5k, y+z=6k, z+x=7k$$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k, y=2k, z=4k$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2} \\ &= \frac{25k^2 - 16k^2}{9k^2 - 4k^2 + 16k^2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore m=7, n=3$$

$$\therefore m+n=10$$

24. $\sqrt{6 + \sqrt{20}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{2a+b}{b} - ab$ 의 값은?

① $13 + 6\sqrt{5}$

② $13 - 6\sqrt{5}$

③ $13 + 3\sqrt{5}$

④ $19 - 3\sqrt{5}$

⑤ $19 + 3\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{6 + \sqrt{20}} &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(5+1) + 2\sqrt{5 \times 1}} \\ &= \sqrt{5} + 1\end{aligned}$$

그런데 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $3 < \sqrt{5} + 1 < 4$

$$\therefore a = 3, b = (\sqrt{5} + 1) - 3 = \sqrt{5} - 2$$

$$\begin{aligned}\frac{2a+b}{b} - ab &= \frac{2 \times 3 + \sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} - 3(\sqrt{5} - 2) \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} - 3(\sqrt{5} - 2) \\ &= (13 + 6\sqrt{5}) - 3\sqrt{5} + 6 \\ &= 19 + 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

25. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다.
이때, $m - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$