1. 집합 $A = \left\{x | x\text{는}1 < x < 2\text{인실수}\right\}$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $3 \in A$

② $\sqrt{3} \notin A$

③ $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$

④ 집합 A 는 무한집합이다.

⑤ 집합 A 는 공집합이다.

해설

① $3 > 2$ 이므로 $3 \notin A$ 이다.

② $1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$ 에서 $1 < \sqrt{3} < 2$ 이므로 $\sqrt{3} \in A$

③ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ 은 모두 1보다 작으므로

$A \neq \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ 이다.

⑤ $\frac{3}{2} \in A$ 이므로 공집합이 아니다.

2. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\varnothing \subset A$	㉡ $\{3,\ 5,\ 7\} \subset A$
㉢ $1 \in A$	㉣ $2 \in A$
㉤ $\{2\} \in A$	

① ㉠　② ㉢　③ ㉢, ㉤
④ ㉠, ㉢, ㉤　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉢ $1 \notin A$
㉤ $\{2\} \subset A$

3. 두 집합 $A = \{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 11\}$, $B = \{1,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

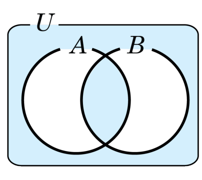
▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$A \cup B = \{1,\ 4,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11, 12\}$ 이므로
원소의 합을 구하면 $1 + 4 + 7 + 9 + 10 + 11 + 12 = 54$

4. 다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$　　② $(A \cup B) \cup (A \cap B)$

③ $(A \cap B) \cup (A^c - B^c)$　　④ $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$

⑤ $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

해설

벤다이어그램은 $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 을 나타낸다. $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

5. 전체집합 $U = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 8 이하의 짝수$\}$, $B = \{2,\ 8\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $B - A = \varnothing$　② $A^C \cup B = U$　③ $B \cap A^C = \varnothing$

④ $A \cap B = B$　⑤ $A \cup B = A$

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{2,\ 8\}$ 이므로 $B \subset A$ 이다.
따라서 ② $A^C \cup B \neq U$ 이다.

6. $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 에 대하여 $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$ 일 때, B^c-A^c 은?

① $\{3\}$ ② $\{3,5\}$ ③ $\{4\}$
④ $\{4,5\}$ ⑤ $\{4,5,6\}$

해설

$B^c-A^c=A-B=\{3,4,5\}-\{1,2,3\}=\{4,5\}$ 이다.

7. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $f: x \to x$　　② $f: x \to -2|x|$

③ $f: x \to x^2$　　④ $f: x \to x+3$

⑤ $f: x \to |3x|+1$

해설

③ $y=f(x)=x^2$ 에서
$f(-1)=(-1)^2=1 \in Y$, $f(0)=0^2=0 \in Y$, $f(1)=1^2=1 \in Y$
따라서 함수이다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 a, b 의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

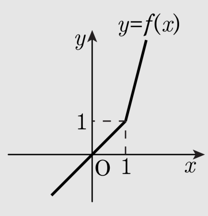
① $a=1,\ b=-1$　② $a=1,\ b=1$　③ $a=2,\ b=-1$

④ $a=2,\ b=0$　⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

f가 일대일대응이 되려면

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax+b$가

점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로

$a+b=1 \quad \cdots$ ㉠

또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선

$y=ax+b$의 기울기도 양이어야 한다.

$\therefore\ a>0 \quad \cdots$ ㉡

따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을

모두 만족시키는 것은 ③이다.

9. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$f^{-1} \circ f = f \circ f$

이때, $f^{-1} \circ f = I$(I는항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

즉 $(f \circ f)(x) = x$

$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+3)$$
$$= a(ax+3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

따라서 $a^2 = 1,\ 3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

10. $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x-1-\dfrac{1}{x-1}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{x}{x-1}$ ② $\dfrac{x}{x-2}$ ③ $\dfrac{x-1}{x-2}$ ④ $\dfrac{x^2}{x-1}$ ⑤ $\dfrac{x^2}{x-2}$

해설

$$\frac{x+1+\frac{1}{x-1}}{x-1-\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}}{\frac{(x-1)^2-1}{x-1}}$$
$$= \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)^2-1}$$
$$= \frac{x^2}{x^2-2x} = \frac{x^2}{x(x-2)}$$
$$= \frac{x}{x-2}$$

11. $2x=3y=4z$일 때, $\dfrac{x^2-y^2-z^2}{xy-yz-zx}$의 값은?

① 6 ② $-\dfrac{6}{11}$ ③ $\dfrac{6}{11}$ ④ $-\dfrac{11}{6}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

해설

$2x=3y=4z=k(k\neq 0)\Rightarrow x=\dfrac{k}{2},\ y=\dfrac{k}{3},\ z=\dfrac{k}{4}$

$$\frac{\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{9}-\frac{k^2}{16}}{\frac{k^2}{6}-\frac{k^2}{12}-\frac{k^2}{8}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}}=-\frac{11}{6}$$

12. $-1 < x < 1$일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준식) $= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$
$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$

13. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

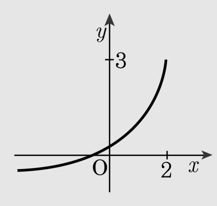
$\therefore\ \ 2+3+4=9$

14. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면
② 1 , 4 사분면
③ 1 , 2 , 3 사분면
④ 2 , 3 , 4 사분면
⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로
$\therefore$ 1,2,3 사분면을 지난다.



15. 두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$, $x=\sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$
② $\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$
③ $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
④ $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
⑤ $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 과 $x=\sqrt{y+1}$은
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=\sqrt{x+1}$ 과 $y=x$ 의 교점을 구하면 된다.
$\therefore \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

16. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

$\{1, 9\} \subset X \subset A$

▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 8개

해설

X는 원소 1과 9를 포함하는 집합 A의 부분집합이므로 X의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개)이다.

17. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ a+1\}$ $B = \{3,\ 5,\ a\}$ 에서 $A \cap B = \{2,\ 3\}$ 일 때, $A - B$ 는?

① $\varnothing$ ② $\{1\}$ ③ $\{5\}$

④ $\{1,\ 5\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 3\}$

해설

$A \cap B = \{2,\ 3\}$ 이므로 $a+1=3,\ a=2$
따라서, $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5\}$ 이므로
$A - B = \{1\}$ 이다.

18. A 중학교 어느 반 학생 36 명 중에서 방과 후 활동을 신청하는데 영어를 신청한 학생이 14 명, 수학을 신청한 학생이 19 명, 어느 과목도 신청하지 않은 학생이 10 명이었다. 두 과목 중 수학 과목만 신청한 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 12 명

해설

$n(U) = 36, n((A \cup B)^c) = 10$ 이므로 $n(A \cup B) = 36 - 10 = 26$ 이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로 $n(A \cap B) = 7$ 이다.
따라서 수학 과목만 신청한 학생은 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 19 - 7 = 12$ 이다.

19. $p : |x-1| \le h,\ q : |x+2| \le 7$ 에 대하여 'p 이면 q 이다' 가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \ge 0$)

① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
$|x-1| \le h$ 에서 $-h \le x-1 \le h$ 이므로
$-h+1 \le x \le h+1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
$|x+2| \le 7$ 에서 $-7 \le x+2 \le 7$ 이므로
$-9 \le x \le 5$
$P \subset Q$ 이어야 하므로
$-h+1 \ge -9$ 에서
$h \le 10$
$h+1 \le 5$ 에서 $h \le 4$
따라서 $0 \le h \le 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

20. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$
$\therefore$ q 는 p 이기 위한 필요조건

21. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로
$a^2+2a+1-4a-4$
$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서 정수 a의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3으로 5개

22. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ 25
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면
$a^2+b^2=25$ 이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$ 에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$ 이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

23. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$
$\therefore a + b = 2$

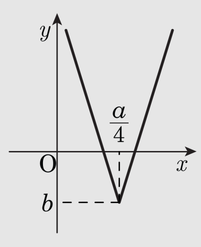
24. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

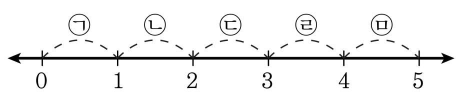


따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \quad \therefore\ a + b = 10$

25. $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+f(5,\ 4)+\cdots+f(10,\ 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a > b > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$a > b$ 일 때, $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\therefore\ f(2,\ 1) + f(3,\ 2) + f(4,\ 3) + \cdots + f(10,\ 9)$

$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots$

$+ (\sqrt{10}-\sqrt{9})$

$= -1 + \sqrt{10} = k$

그런데 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ 에서

$2 < -1 + \sqrt{10} < 3$ 이므로

k 는 ㉢안에 있다.