1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$

$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$

$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

3. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_7 = ar^6 = 96 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$

$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3r^9$

$a^3r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$

$\therefore ar^3 = 4$

$\therefore a_4 = 4$

5. 2와 18의 등비중항을 x, 2와 18의 등차중항을 y라 할 때, x^2+y^2의 값은?

① 122 ② 128 ③ 136 ④ 146 ⑤ 152

해설

x는 2와 18의 등비중항이므로
$x^2 = 2 \times 18 = 36$
y는 2와 18의 등차중항이므로
$2y = 2 + 18 = 20$
$\therefore y = 10$
$\therefore x^2 + y^2 = 36 + 100 = 136$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

7. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$
② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$
③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$
⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

8. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$
$$= 2^{n-2}$$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1+a_2):(a_3+a_4)=2:3$가 성립할 때, $a_1:a_8$는? (단, $a \neq 0$이다.)

① $1:2$ ② $1:3$ ③ $2:3$ ④ $2:5$ ⑤ $3:5$

해설

$$3(a_1+a_2)=2(a_3+a_4)$$
$$3(a+a+d)=2(a+2d+a+3d)$$
$$6a+3d=4a+10d$$
$$2a=7d$$
$$\begin{aligned} a_1:a_8 &= a:(a+7d) \\ &= a:3a=1:3 \end{aligned}$$

10. 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 $4,\ a,\ b$이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{40}{3}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$이고, $4,\ a,\ b$가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로

$4^2 + a^2 = b^2 \cdots$ ㉠

또, $4,\ a,\ b$가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a = 4 + b,\ b = 2a - 4 \cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면

$4^2 + a^2 = (2a-4)^2,\ 16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$

$3a^2 - 16a = 0,\ a(3a-16) = 0$

$\therefore\ a = \frac{16}{3}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

11. 수열 $\{a_n\}$은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=20$일 때, a_2+a_8의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$을 차례로 $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$로 놓으면

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a=20$

$\therefore\ a=4$

이때, $a_2=a-3d,\ a_8=a+3d$이므로

$a_2+a_8=2a=8$

12. 2와 $\frac{2}{3}$ 사이에 두 수 a, b를 넣어서 만든 4개의 수 2, a, b, $\frac{2}{3}$가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

2, a, b, $\frac{2}{3}$가 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{3}{2}$이 등차수열을 이룬다.

따라서 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

13. 등차수열 30, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n, -10 의 합이 210 이 되도록 공차 d 의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

첫째항이 30, 끝항이 -10 이고 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 210 이므로

$$\frac{(n+2)\{30+(-10)\}}{2}=210$$

$n+2=21 \quad \therefore \; n=19$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21 항이므로

$-10=30+(21-1)d \quad \therefore \; d=-2$

14. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	⋯	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n행의 수열의 합을 S_n이라 하면

제1 행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_1 = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 100, 공차가 $3 \cdot 10 = 30$인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} &= \frac{10(2 \cdot 100 + 9 \cdot 30)}{2} \\ &= 2350 \end{aligned}$$

15. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$는 공비이므로 8

16. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$원 ② $3^{30}-1$원 ③ 3^{30}원

④ $3^{30}+1$원 ⑤ $3^{30}+2$원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r=3$

$a=2,\ r=3$

$$\therefore\ S_{30}=\frac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$$

17. 수열 1, 101, 10101, 1010101, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{99}$ ② $\dfrac{10^{202}-1}{99}$ ③ $10^{201}-1$

④ $\dfrac{10^{402}-1}{99}$ ⑤ $10^{401}-1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_1=1$

$a_2=10^2+1$

$a_3=10^4+10^2+1$

$\vdots$

$a_n=10^{2(n-1)}+\cdots+10^4+10^2+1$

$=\dfrac{1\left\{(10^2)^n-1\right\}}{10^2-1}=\dfrac{1}{99}(10^{2n}-1)$

$\therefore\ a_{100}=\dfrac{1}{99}(10^{200}-1)$

18. $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$의 값은?

① 1102 ② 1214 ③ 1368 ④ 1540 ⑤ 1748

해설

$1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{20} k(21-k) = \sum_{k=1}^{20}(21k - k^2)$

$= 21\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2$

$$= 21 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6}$$

$= 4410 - 2870 = 1540$

19. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$

$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$

$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$

$= 8 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$

$= 440 - 30 - 15 = 395$

20. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(n-3)}{(n+1)(n+2)}$

② $\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(n+6)}{3(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+3)}$

⑤ $\frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

해설

$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 이므로

(준식)$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

21. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

22. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

양변에 (㉠)^{3}을 더하면

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$$

$$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$$

$$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$$

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

양변에 (㉠)^{3}을 더하면

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$$

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

23. 다음과 같이 4와 109 사이에 k 개의 수를 나열하여 항의 개수가 $k+2$ 인 등차수열을 만들려고 한다. 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k 의 값은?

$$4,\ \underbrace{\square, \square, \cdots, \square}_{k\text{개}},\ 109$$

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

해설

$a_1 = 4$

$a_{k+2} = 4 + (k+1) \times d = 109$

$4 + (k+1) \times d = 109$

$(k+1) \times d = 105$

$(k+1) \times d = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore d = 3,\ k+1 = 35 \quad \therefore k = 34$

24. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① $5 : 17$ ② $15 : 31$ ③ $17 : 9$

④ $31 : 15$ ⑤ $49 : 50$

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$

b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$$

$$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k},$$

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k+(n-1)3k$$

$$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k+(n-1)7k$$

$$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$$

$$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$$

25. 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2014$일 때, 짝수 번째 항들의 합 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$의 값은?

① 1017 ② 1027 ③ 1037 ④ 1047 ⑤ 1057

해설

첫째항이 a_1, 공차가 2 이므로 첫째항부터 제 100 항까지의 합 S_{100}은 $S_{100}=\dfrac{100\left\{2a_1+(100-1)\times 2\right\}}{2}=2014$

$\therefore\ 50(a_1+99)=1037$

이 수열 $\{a_n\}$에 대하여 짝수항의 수열은 첫째항이 a_1+2이고 공차가 4 인 등차수열이므로

$$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=\frac{50\left\{2(a_1+(100-1)\times 2)\right\}}{2}$$

$=50\left\{(a_1+2)+(50-1)\times 2\right\}$

$=50(a_1+100)$

$=50(a_1+99)+50$

$=1007+50$

$=1057$

26. 4와 6으로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 41400

해설

4와 6으로 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수이므로 $12n$(n은 자연수) 의 꼴이다.

이때, $100 \le 12n \le 1000$이므로

$8.\times\times \le n \le 83.\times\times$

$\therefore\ n = 9, 10, 11, \cdots, 83$

그런데 $n = 9$일 때, $12n = 108$,

$n = 83$일 때, $12n = 996$이므로 조건을 만족하는 수는 첫째항이 108, 끝항이 996, 항수가 $83 - 8 = 75$인 등차수열이다.

따라서 구하는 총합은 $\dfrac{75(108 + 996)}{2} = 41400$

27. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$

㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \dfrac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \dfrac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로

$0 < 10 + 2d < 2$

즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$ 이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$

즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0,\ a_6 < 0$(참)

㉢$a_1 = 10 - 2d$ 이므로

$-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$

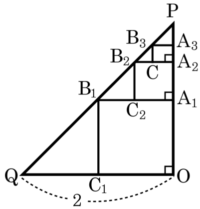
$a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

28. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2$인 직각이등변삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



① $\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$ ② $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

③ $\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{4}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2$인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{\mathrm{OA_1}}=1$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{A_3A_4}}=\frac{1}{4},\cdots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2, $\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{4}\right)^4,\cdots$ 이므로 구하는 정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$$

29. $\sum_{k=1}^{30} k - 2\sum_{k=1}^{30} \left[\frac{k}{2}\right]$ 의 값을 구하여라. (단. $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\sum_{k=1}^{30} k - 2\sum_{k=1}^{30} \left[\frac{k}{2}\right] = \sum_{k=1}^{30} \left(k - 2\left[\frac{k}{2}\right]\right)$ 이므로

k에 1부터 30까지 차례로 대입하면

(주어진 식)$= 1+0+1+0+1+0+\cdots+1+0=15$

30. 수열 $2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17, \cdots$ 의 제 10항 까지의 합은?

① $2^9 - 1$ ② $2^9 + 1$ ③ $2^9 + 9$

④ $2^{10} - 1$ ⑤ $2^{10} + 9$

해설

$2,\quad 3,\quad 5,\quad 9,\quad 17$

$\quad\vee\quad\vee\quad\vee\quad\vee$

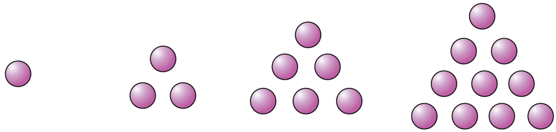
$\quad 1\quad 2\quad 4\quad 8$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2 + 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 10 \\ &= 2^{10} - 1 + 10 = 2^{10} + 9 \end{aligned}$$

31. 다음 그림과 같이 규칙적인 구슬의 개수를 증가시키면서 정삼각형의 모양을 만들 때, 필요한 구슬의 개수를 삼각수라고 한다. 이 삼각수들의 수열을 a_1, a_2, $a_3, \cdots$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?



$a_1 = 1$ $\quad$ $a_2 = 3$ $\quad$ $a_3 = 6$ $\quad$ $a_4 = 10$

① 1500 ② 1510 ③ 1520 ④ 1530 ⑤ 1540

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 6,\ 10, \cdots$

$\{b_n\} :\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$

계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열이므로

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2+k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2}\right) \\ &= 1540 \end{aligned}$$

32. 수열 $\{a_n\}$을 $\log_3 a_1a_2a_3\cdots a_n = n(n-1)\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의할 때, $\dfrac{a_{21}}{a_{20}}$의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

해설

$\log_3 a_1a_2a_3\cdots a_n = n(n-1)$에서

$a_1a_2a_3\cdots a_n = 3^{n(n-1)} \cdots$ ㉠

$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1} = 3^{(n-1)(n-2)} \cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면 $a_n = 3^{2(n-1)}$

$$\therefore\ \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{3^{40}}{3^{38}} = 3^2 = 9$$

33. 분모가 $n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100)$일 때, 분자가 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$인 수열 $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{100},\ \frac{2}{100},\ \frac{3}{100},\ \cdots,$ $\frac{100}{100}$이 있다. 이 수열에서 $\frac{1}{k}$과 값이 같은 항의 개수를 $a_k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 100)$이라 할 때, $a_k=7$을 만족하는 k의 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$a_k=6$ 의미는 $\frac{1}{k}$과 값이 같은 항의 개수가 6개라는 의미이다.

a_1 : 1과 같은 항의 개수는 100개

$\therefore\ a_{100}=100$

a_2 : $\frac{1}{2}$와 같은 항의 개수이므로

$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \cdots,\ \frac{50}{100}$의 50개

$\therefore\ a_2=50$

이런 식으로 하면

$a_3=33,\ a_4=25,\ a_5=20,\ \cdots,\ a_{13}=7$

$,\ a_{14}=7,\ a_{15}=6$

따라서 $a_{13}=a_{14}=7$이므로 $k=13$ 또는 $k=14$

$\therefore\ 13+14=27$

34. $a_1 = 1,\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $\dfrac{1}{45}$ ② $\dfrac{1}{46}$ ③ $\dfrac{1}{47}$ ④ $\dfrac{1}{48}$ ⑤ $\dfrac{1}{49}$

해설

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n$이므로 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$

$a_{10} = \dfrac{2}{10^2 - 10 + 2} = \dfrac{1}{46}$

35. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값은?

① -8 ② -9 ③ -10 ④ -11 ⑤ -12

해설

$a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}$에서

$a_{n+1} = 6a_n - 6 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n$

$a_{n+1} - 3^{n+1} = 6(a_n - 3^n)$

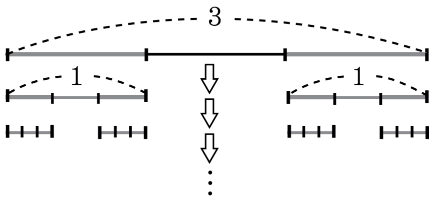
따라서 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$

공비가 6인 등비수열이다.

$a_n - 3^n = -6^{n-1} \quad \therefore\ a_n = -6^{n-1} + 3^n$

$\therefore\ a_3 = -36 + 27 = -9$

36. 다음 그림과 같이 길이가 3인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$　② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$　③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$
④ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$　⑤ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

해설

위 과정을 n회 반복하였을 때, 남아 있는 실의 길이의 합을 a_n이라고 하면

$a_1 = 3 \times \frac{2}{3} = 2,\ a_2 = a_1 \times \frac{2}{3},\ a_3 = a_2 \times \frac{2}{3}, \cdots$ 이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 실의 길이의 합은 $a_{20} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$

37. 다음은 $h>0$일 때, $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad (가) \quad}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad (가) \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$
② $1+2h,\ 1+(k+1)h$
③ $1+h^2,\ 1+kh$
④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$
⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n=2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{1+2h}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{1+kh})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

38. 네 양수 a, b, c, d가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(a+b)(c+d) \geq 4ad$

㉡ $a+b+c+d \geq 4\sqrt{ad}$

㉢ 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 존재한다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

네 양수 a, b, c, d가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad=bc$

㉠ $(a+b)(c+d)=ad+bc+ac+bd$

$\geq 2ad+2\sqrt{ac\cdot bd}=4ad$ $(\because ad=bc)$ $\therefore$ 참

㉡ $a+b+c+d=(a+c)+(b+d)$

$\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$

$\geq 2\sqrt{(ad+bc)+(ab+cd)}$

$\geq 2\sqrt{2ad+2\sqrt{ab\cdot cd}}=2\sqrt{2ad+2ad}$

$=4\sqrt{ad}$ $\therefore$ 참

㉢ 수열 a, b, c, d의 공비를 r이라 하면

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+ar}{cx+cr}=\frac{a(x+r)}{c(x+r)}=\frac{a}{c}$$

따라서, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

39. 각 항이 복소수인 등비수열 $\{Z_n\}$에 대하여 $z_1 = 1,\ z_2 = a + bi,\ z_3 = a - bi$(단, $a,\ b$는 실수, $b > 0$) 일 때, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 모든 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 34

해설

$1,\ z_2,\ z_3$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $z_2^2 = z_3$

즉, $(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$이고

$b > 0$이므로 $a = -\dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $Z_1 = 1,\ Z_2 = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i),\ z_3 = \dfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i),\ Z_4 = 1, \cdots$

이므로

$Z_{3n-2} = 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 67)$

따라서, Z_1 부터 Z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 합은 67이다.

40. 다음은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고 $S_n = p$, $S_{2n} = q$라 할 때, S_{3n}을 p, q로 나타내는 과정이다. (단, $p \neq 0, q \neq 0$)

> 자연수 n에 대하여
> $A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
> $B = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n}$
> $C = a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$이라 하자.
> 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 A, B, C는 이 순서대로 공비가 [(가)]인 등비수열을 이룬다.
> 등비중항의 성질에 의하여 $B^2 = AC$
> 또한, $\begin{cases} A = S_n = p \\ B = S_{2n} - S_n = q - p \\ C = S_{3n} - S_{2n} = S_{3n} - q \end{cases}$
> 따라서 $S_{3n} =$ [(나)]이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : r^{n-1}, (나) : $\dfrac{(p-q)^2}{p}$

② (가) : r^n, (나) : $\dfrac{(p+q)^2}{p}$

③ (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$

④ (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2 + pq + q^2}{p}$

⑤ (가) : r^{2n}, (나) : $\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$

해설

$A = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $B = \dfrac{ar^n(r^n - 1)}{r - 1}$, $C = \dfrac{ar^{2n}(r^n - 1)}{r - 1}$

이므로 A, B, C는 공비가 [r^n]인 등비수열이고 A, B, C를 $B^2 = AC$에 대입하여 정리하면

$(q - p)^2 = p(S_{3n} - q)$

$\therefore\ S_{3n} = [\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}]$

$\therefore$ (가) $= r^n$, (나) $= \dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$

41. 수열 $2,\ 2^2+2^3,\ 2^4+2^5+2^6,\ 2^7+2^8+2^9+2^{10},\cdots$ 의 마지막 항이 $2^{79}-2^{67}$ 일 때, 첫째항부터 마지막 항까지의 합은?

① $2^{79}-2$ ② $2^{79}-1$ ③ 2^{79}

④ 2^{79+1} ⑤ $2^{79}+2$

해설

마지막 항을 제 n항이라 하고 첫째항부터 마지막 항까지의 첫 번째 수를 배열하면

$2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7,\cdots,\ 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$

따라서 제 n항은 첫째항이 $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, 공비가 2인 등비수열의 제 n항까지의 합이므로

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n-1)}{2-1}=2^{\frac{n(n-1)+1}{2}}(2^n-1)$$

$2^{79}-2^{67}=2^{67}(2^{12}-1)=2^{\frac{12\times11}{2}+1}(2^{12}-1)$ 이므로 $n=12$

따라서 첫째항부터 마지막 항 즉, 제 12항까지의 합은

$\frac{2(2^{78}-1)}{2-1}=2^{79}-2$

42. A 회사는 제품 생산량을 1 년마다 2 배로 증가시킬 계획이다. 이 회사는 2014 년 초 32 만 개, 2015 년 초 64 만 개, 그리고 2016 년 초 128 만 개의 제품을 시판하고 앞으로도 매년 제품을 2 배로 생산할 계획이다. 한편 경쟁업체인 B 회사는 최근 제품의 생산량을 9 개월마다 2 배로 증가하기로 하였다. B 회사가 2016 년 초에 4 만 개의 제품을 생산한다고 할 때, B 회사 제품의 생산량이 A 회사 제품의 생산량과 같아지는 것은 몇 년 후인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

2016 년 기점으로 t 년 후 A 회사 제품의 생산량을 $f(t)$ 라 하면

$f(t) = 128 \times 2^t$

B 회사 제품의 생산량을 $g(t)$ 라 하면

$g(t) = 4 \cdot r^t$

$\frac{3}{4}$ 년마다 2 배씩 되므로 $r^{\frac{3}{4}} = 2$ 에서 $r = 2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore \ g(t) = 4 \cdot 2^{\frac{4}{3}t}$

이때, $f(t) = g(t)$ 인 t 의 값을 구하면

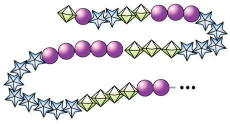
$128 \cdot 2^t = 4 \cdot 2^{\frac{4}{3}t}$

$t + 7 = \frac{4}{3}t + 2$

$\therefore \ t = 15$

43. 어떤 학생이 계발활동 시간에 목걸이를 만들고자 한다. 아래 그림과 같이 세 종류의 인조보석 , , 을 사용하여 처음에는 1개, 1개, 2개를 꿰고 난 뒤, 다음 규칙을 순서대로 반복한다.

> I. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 1개 더 많이 꿴다.
> II. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 2개 더 많이 꿴다.
> III. 는 I과 II에서 꿴 와 의 개수를 더한 만큼 꿴다.



인조 보석 200개를 사용하여 목걸이를 만들었을 때, 목걸이에 있는 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

첫 번째 - : 1개, : 1개, : 2개
두 번째 - : 2개, : 3개, : 5개
세 번째 - : 3개, : 5개, : 8개

⋮

n 번째 - : n개, : $(2n-1)$개, : $(3n-1)$개
n번째 후 전체 구슬의 개수는

$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \sum_{k=1}^{n}(3k-1)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - n + 3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - n$

$= n(3n+1)$

$n(3n+1) \le 200$인 최대의 n의 값을 구하면 $n = 8$이다.
또한, $n = 8$까지 꿴 구슬은 모두 200개이므로 구슬 의 개수는

$\sum_{k=1}^{8}(2k-1) = 2 \cdot \dfrac{8 \cdot 9}{2} - 8 = 64$

44. 다음은 수열의 합

$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} \cdots\cdots (1)$

을 계산하는 과정이다. 이때, ㉠ ~㉤에 들어갈 것으로 알맞지 않은 것은?

$S - xS$ 를 하면

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{S} = 1 + 2x + 3x + \cdots + (n-1)x^{n-2}\ nx^{n-1} \\ -) & x\mathrm{S} = \\ \hline & (1-x)\mathrm{S} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - ㉡ \end{array}$$

(i) $x \neq 1$ 일 때,

$(우변) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - ㉡$

$= \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{㉢}$

$\therefore S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n-1}}{㉣}$

(ii) $x = 1$ 일 때, (1) 에서

$S = 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + \cdots + n\cdot 1^{n-1}$

$\therefore S =$ ㉤

---

① ㉠ $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1}$

② ㉡ nx^n

③ ㉢ $1-x$

④ ㉣ $(1-x)^2$

⑤ ㉤ $n(n+1)$

해설

⑤ ㉤ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

45. 유한수열 $2,\ 2^2+2^3,\ 2^4+2^5+2^6,\ 2^7+2^8+2^9+2^{10}, \cdots$ 의 마지막 항이 $2^{56}-2^{46}$ 일 때, 첫째항부터 마지막 항까지의 합은?

① $2^{56}-2$　　② $2^{56}-1$　　③ 2^{56}

④ $2^{56}+1$　　⑤ $2^{56}+2$

해설

마지막 항을 제 n항이라 하고 첫째항부터 마지막 항까지의 첫 번째 수를 배열하면

$2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7, \cdots, 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$

따라서 제 n항은 첫째항이 $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, 공비가 2인 등비수열의 제 n항까지의 합이므로

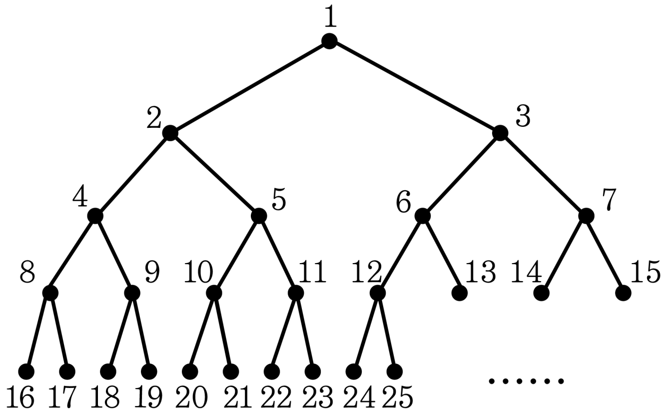
$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n-1)}{2-1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n-1)$$

$2^{56}-2^{46} = 2^{46}(2^{10}-1) = 2^{\frac{10\times 9}{2}+1}(2^{10}-1)$ 이므로 $n=10$

따라서 첫째항부터 마지막 항 즉, 제 10항까지의 합은

$$\sum_{n=1}^{55} 2^n = \frac{2(2^{55}-1)}{2-1} = 2^{56}-2$$

46. 아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a,\ b)$라 하자. 예를 들면 $N(4,\ 6)=4$이고 $N(12,\ 27)=3$이다.

$N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots+N(32,\ 63)$의 값은?

① 196 ② 258 ③ 270 ④ 312 ⑤ 344

해설

열의 맨 오른쪽 수를 나열하여 계차수열을 생각해 보면

$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$

$\vee\ \vee\ \vee\ \ \vee$

$2\ \ 4\ \ 8\ \ 16\cdots$

이므로 위에서 5번째 열의 맨 끝의 수는 63임을 알 수 있다.
서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수가 $N(a,\ b)$이므로

$N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots+N(32,\ 63)$

$=2+(4+4)+(6+6+6+6)+\underbrace{(8+\cdots+8)}_{8\text{개}}+\underbrace{(10+10+\cdots+10)}_{16\text{개}}$

$=2+4\times2+6\times4+8\times8+10\times16=258$

해설

그림에서

n

/\

$2n\ 2n+1$ 인 관계가 있고, 서로 다른 두 자연수 $a,\ b$에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수가

$N(a,\ b)$이므로

$N(32,\ 33)=2$

$N(32,\ 34)=N(32,\ 35)=4$

$N(32,\ 36)=N(32,\ 37)=N(32,\ 38)=N(32,\ 39)=6$

$N(32,\ 40)=N(32,\ 41)=\cdots=N(32,\ 47)=8$

$N(32,\ 48)=N(32,\ 49)=\cdots=N(32,\ 63)=10$이다.

$\therefore N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots N(32,\ 63)$

$=2+4\times2+6\times4+8\times8+10\times16=258$

47. 아래 표는 $1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5, \cdots$ 을 왼쪽 위에서부터 대각선으로 써내려간 것이다. 이 때, 위에서 첫 번째, 왼쪽에서 16 번째 칸의 수를 구하여라.

1	0	0	4	6	$\cdots$	
2	3	0	0			
0	5	7				
0	0					

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

주어진 수를 군수열로 나타내면

$(1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3,\ 0),\ (4,\ 0,\ 5,\ 0), \cdots$ 이고,

구하고자 하는 수는 제16군의 첫째 항이다.

제 15군까지의 항의 개수가 $1 + 2 + \cdots + 15 = \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$

그러므로 구하는 수는 수열의 제121항이다.

$1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5, \cdots$ 에서 $2n$ 번째 항은 모두 0 이고,

$2n-1$ 번째 항은 n 이다.

$\therefore 2n - 1 = 121$

$\therefore n = 61$

48. 수직선 위의 점 $\mathrm{P}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 임의의 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, P_{n+1}을 $2:1$로 내분하는 점이 P_{n+2}일 때, 점 P_{10}의 좌표는?(단, 두 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 0, 3이다.)

① $\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$ ② $\frac{9}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^7}$ ③ $-\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$
④ $\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^8}$ ⑤ $\frac{9}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^8}$

해설

점 $\mathrm{P}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 좌표를 a_n이라 하면

$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+a_n}{2+1}$, 즉 $3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

따라서 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+2}-a_n)$이므로

$$a_n=0+\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10}=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$$

49. 자연수 n에 대하여 $1^n + 2^n + 3^n$을 10으로 나눈 나머지를 a_n으로 정의하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 + a_4 = 12$

㉡ $a_{n+1} = a_{n+5}$

㉢ $\sum_{k=1}^{102} a_k = 610$

① ㉡　② ㉢　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $n = 2$일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2$에서 일의 자리 수만 생각하면
$1 + 4 + 9 = 14$이므로 $a_2 = 4$
$n = 4$일 때, $1^4 + 2^4 + 3^4$에서 일의 자리 수만 생각하면
$1 + 6 + 1 = 8$이므로 $a_4 = 8$
$\therefore\ a_2 + a_4 = 12$(참)

㉠ 1^n의 일의 자리 수는 항상 1
$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots$의 일의 자리 수는 각각
$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ \cdots$
$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots$의 일의 자리 수는 각각
$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ \cdots$
따라서 1^{n+4}과 1^n, 2^{n+4}과 2^n, 3^{n+4}과 3^n의 일의 자리 수가 각각 같으므로
$a_{n+1} = a_{n+5}$(참)

㉢ ㉡에서 $a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ a_5 = 6,\ \cdots$이고
$102 = 4 \times 25 + 2$이므로

$$\sum_{k=1}^{102} a_k = (6+4+6+8) \times 25 + (6+4) = 610\text{(참)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

50. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 2}$로 정의될 때, $[a_{10}]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a_{n+1} - \alpha = \dfrac{\beta(a_n - \alpha)}{a_n + 2}$의 꼴로 고치면 $\alpha + \beta = 3$, $-\alpha\beta + 2\alpha = 2$ 이므로 $(\alpha,\ \beta)$은 $(2,\ 1)$ 또는 $(-1,\ 4)$이다.

$(\alpha,\ \beta) = (2,\ 1)$이라고 하면 $a_{n+1} - 2 = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} \cdots$ ㉠

㉠식의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} = \frac{a_n + 2}{a_n - 2} = 1 + \frac{4}{a_n - 2} \cdots ㉡$$

㉡식을 $\dfrac{1}{a_{n+1} - 2} - k = 4\left(\dfrac{1}{a_n - 2} - k\right)$ 꼴로 고치면 $k = -\dfrac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} + \frac{1}{3} = 4\left(\frac{1}{a_n - 2} + \frac{1}{3}\right)$$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n - 2} + \dfrac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$이고, 공비가 4인 등비수열이다.

$$\therefore\ \frac{1}{a_n - 2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 4^n$$

이 식을 a_n에 대해서 정리하면 $a_n = \dfrac{3}{4^n - 1} + 2$

$$\therefore\ [a_{10}] = \left[\frac{3}{4^{10} - 1} + 2\right] = 2$$