1. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

2. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$

따라서 $xy \geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

3. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\text{나})^2}{2}$ 이므로
부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$　　② $\geq,\ a - b,\ a = b = 0$

③ $>,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$　　④ $>,\ a - b,\ a = b$

⑤ $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 = \dfrac{a}{2} - 2\sqrt{\dfrac{a}{2} \times \dfrac{b}{2}} + \dfrac{b}{2}$

$= \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

(가) , (나)의 결과에서 $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(다) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\dfrac{a}{2}} - \sqrt{\dfrac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a = b$일 때 성립한다.

4. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족할 때, $\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}$의 최솟값을 구하면?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$a>0,\ b>0$ 이고, $a+b=1$이므로,

$\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=\frac{(a^2b+ab^2)+(a+b)}{ab}$

$=\frac{ab(a+b)+(a+b)}{ab}=\frac{ab(a+b)}{ab}+\frac{a+b}{ab}$

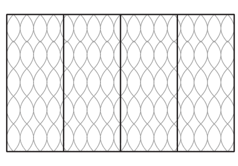
$=(a+b)+\frac{a+b}{ab}=1+\frac{1}{ab}$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$에서 $\frac{1}{2}\geq\sqrt{ab}(\because\ a+b=1)$

$\therefore\ \frac{1}{ab}\geq 4$

$\therefore\ \frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geq 1+4=5$

5. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면
$2a+5b=60$
$a,\ b$는 양수이므로
$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$
양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$
$\therefore\ ab\leq 90$
한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로
$S=ab\leq 90$
따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

6. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　　② $5+5\sqrt{2}$　　③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a^2+b^2=25$이고

$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$

$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고

$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

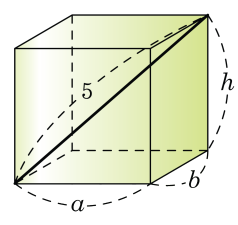
7. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ 이고 $a+b+c=14$ 일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$
$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$\leq 14(a+b+c)=14^2$
$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ 이므로
$\therefore\ 0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$
따라서, 구하는 최댓값은 14 이다.

8. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

 : $20\sqrt{3}$

9. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$　② $\frac{144}{15}$　③ $\frac{144}{25}$　④ $\frac{288}{25}$　⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$이라 하면
$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로
$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PAC$
$\therefore 24=\frac{1}{2}\times x_1\times 6+\frac{1}{2}\times x_2\times 8+\frac{1}{2}\times x_3\times 10$이므로
$3x_1+4x_2+5x_3=24$
코시-슈바르츠 부등식에서
$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq(3x_1+4x_2+5x_3)^2$
$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq 576$
$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2\geq\frac{576}{50}=\frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

10. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로
$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$
(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)
따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2 이다.

11. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

12. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\frac{9}{a-1}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=4-4a<0$

$\therefore a>1$

$\therefore (a-1)+\frac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{9}{(a-1)}}=6$

따라서 최솟값은 6

13. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$ ② $a=2b$ ③ $a=b$

④ $a^2=b$ ⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

14. 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c)\le kabc$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$s-a=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)>0$

($\because a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s-b>0,\ s-c>0$

(산술평균)≥(기하평균) 이므로

$2\sqrt{(s-a)(s-b)}\le(s-a)+(s-b)=c$

(등호는 $a=b$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-b)(s-c)}\le(s-b)+(s-c)=a$

(등호는 $b=c$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-c)(s-a)}\le(s-c)+(s-a)=b$

(등호는 $c=a$일 때 성립)

변변 곱하면 $8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc$

$\therefore (s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{1}{8}abc$

(등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore k=\frac{1}{8}$

15. a, b가 양의 실수일 때, $a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. A, B에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$　　② $3+\sqrt{2},\ 1$　　③ $3,\ \frac{1}{2}$

④ $4,\ \frac{1}{2}$　　⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a \cdot 4b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{4}$

따라서, $a=1$, $b=\frac{1}{4}$일 때 $a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}}=4$