**1.** 양의 실수 $a, b, c$ 사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a} + \dfrac{a+b+c}{b} + \dfrac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

**해설**

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1$$

$= 3 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c}$ 에서

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$\sqrt{\dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{a}{c}} = 2$, $\dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c} \geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{b}{c}} = 2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3 + 6 = 9$

**2.** 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 $x$, $y$에 대하여 $xy$의 최솟값은?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$

따라서 $xy \geq 16$이므로 $xy$의 최솟값은 16

**3.** $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

**증명**

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\text{나})^2}{2}$ 이므로

부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$

② $\geq,\ a-b,\ a=b=0$

③ $>,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$

④ $>,\ a-b,\ a=b$

⑤ $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a \geq b$

**해설**

$\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 = \dfrac{a}{2} - 2\sqrt{\dfrac{a}{2} \times \dfrac{b}{2}} + \dfrac{b}{2}$

$= \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

(가) , (나)의 결과에서 $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(다) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a=b$일 때 성립한다.

**4.** 양수 $a, b$가 $a+b=1$을 만족할 때, $\dfrac{a^2+1}{a}+\dfrac{b^2+1}{b}$의 최솟값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a>0,\ b>0$ 이고, $a+b=1$이므로,

$$\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=\frac{(a^2b+ab^2)+(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{ab(a+b)+(a+b)}{ab}=\frac{ab(a+b)}{ab}+\frac{a+b}{ab}$$

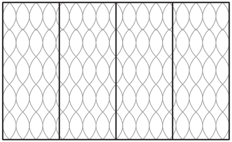
$$=(a+b)+\frac{a+b}{ab}=1+\frac{1}{ab}$$

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$에서 $\dfrac{1}{2}\geq\sqrt{ab}(\because\ a+b=1)$

$$\therefore\ \frac{1}{ab}\geq 4$$

$$\therefore\ \frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geq 1+4=5$$

**5.** 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\text{m}^2$ ② $70\text{m}^2$ ③ $80\text{m}^2$

④ $90\text{m}^2$ ⑤ $100\text{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 $a$, 세로를 $b$라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab\leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

**6.** 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ $25$
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면
$a^2+b^2=25$이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

**7.** $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ 이고 $a+b+c=14$ 일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

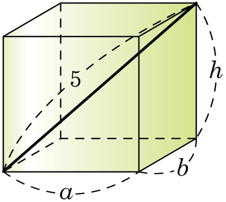
$\leq 14(a+b+c)=14^2$

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ 이므로

$\therefore\ 0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서, 구하는 최댓값은 14 이다.

**8.** 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 $a, b, h$ 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?




① $5\sqrt{3}$  ② $4\sqrt{5}$  ③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$  ⑤ $24\sqrt{6}$

**해설**

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

: $20\sqrt{3}$

**9.** 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 $x_1$, $x_2$, $x_3$라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\dfrac{288}{25}$ ② $\dfrac{144}{15}$ ③ $\dfrac{144}{25}$ ④ $\dfrac{288}{25}$ ⑤ $\dfrac{576}{25}$

**해설**

주어진 삼각형의 세 변을

$\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{CA}}=8$이라 하면

$\angle \mathrm{C}$가 직각인 직각삼각형이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PAC}$

$\therefore 24=\dfrac{1}{2}\times x_1\times 6+\dfrac{1}{2}\times x_2\times 8+\dfrac{1}{2}\times x_3\times 10$이므로

$3x_1+4x_2+5x_3=24$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq(3x_1+4x_2+5x_3)^2$

$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq 576$

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2\geq\dfrac{576}{50}=\dfrac{288}{25}$

따라서 최솟값은 $\dfrac{288}{25}$

**10.** 실수 $a, b$ 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

**11.** 세 양수 $a$, $b$, $c$가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

| |
|---|
| Ⅰ. $a+b+c \geq 3$<br>Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$<br>Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$<br>Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$ |

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로

Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$

Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$

Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$

Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$

$\geq 1+3+3+1 = 8$

**12.** 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ ($a$는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2  ② 3  ③ 4  ④ 5  ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=4-4a<0$$

$\therefore a>1$

$$\therefore (a-1)+\frac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{9}{(a-1)}}=6$$

따라서 최솟값은 6

**13.** 제곱의 합이 일정한 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, $a$와 $b$사이의 관계는?

① $b=2a$ ② $a=2b$ ③ $a=b$

④ $a^2=b$ ⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \leq (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \leq 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

**14.** 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c)\le kabc$를 만족시키는 상수 $k$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$s-a=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)>0$

( $\because$ $a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변 )

같은 방법으로 $s-b>0,\ s-c>0$

(산술평균)≥(기하평균) 이므로

$2\sqrt{(s-a)(s-b)}\le(s-a)+(s-b)=c$

(등호는 $a=b$일 때 성립 )

$2\sqrt{(s-b)(s-c)}\le(s-b)+(s-c)=a$

(등호는 $b=c$일 때 성립 )

$2\sqrt{(s-c)(s-a)}\le(s-c)+(s-a)=b$

(등호는 $c=a$일 때 성립 )

변변 곱하면 $8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc$

$\therefore (s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{1}{8}abc$

(등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore k=\frac{1}{8}$

**15.** $a$, $b$가 양의 실수일 때, $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 $A$를 가지며, 이 때의 $a$의 값은 $B$이다. $A$, $B$에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$ ② $3+\sqrt{2},\ 1$ ③ $3,\ \dfrac{1}{2}$

④ $4,\ \dfrac{1}{2}$ ⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a\cdot 4b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

따라서, $a=1$, $b=\dfrac{1}{4}$일 때 $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$