

1. 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

2. 일차함수 $y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0

② 3

③ 6

④ -6

⑤ -3

해설

$y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가
 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
 45° 이므로
 $a - 2 = \tan 45^\circ = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
 $b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
 $\therefore a + b = 6$

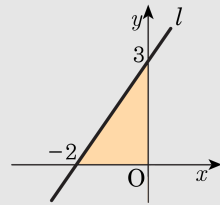
3. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

4. 세 점 A(1, 4), B (-1, 2), C (5, a)가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 2

② 8

③ 10

④ -2

⑤ -4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\text{기울기} = \frac{4-2}{1-(-1)} = 1$$

$$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$$

위에 C(5, a)가 존재하므로 대입하면,

$$\therefore a = 5 + 3 = 8$$

5. $ab < 0$, $ac > 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0$, $ac > 0$ 이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b 로 나

누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

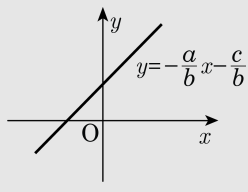
한편, $ab < 0$, $ac > 0$ 이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.



6. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$ 과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 의 해의 개수는?
- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x + y)(x - y) = 0$
 $\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$
 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 - y^2 = 0$
 $(x + y - 1)(x - y - 1) = 0$
 $\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는
두 직선 $x + y = 0, x - y = 0$
 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0, x - y - 1 = 0$
위의 점이므로 다음 그림에서
교점의 개수는 2개

7. 두 직선 $ax - 2y + 2 = 0$, $2x + by + c = 0$ 이 점 $(2, 4)$ 에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c 의 값으로 옳은 것은?

① $a = -3, b = 3, c = -11$ ② $a = -3, b = 3, c = -12$

③ $a = 3, b = -3, c = -13$ ④ $a = 3, b = 3, c = -15$

⑤ $a = 3, b = 3, c = -16$

해설

(i) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1$$

$$\Rightarrow a = b$$

(ii) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

$$\Rightarrow 2a - 8 + 2 = 0, \quad 4 + 4b + c = 0$$

(i), (ii) 를 연립하면, $a = 3, b = 3, c = -16$

8. 두 직선 $ax + by + c = 0$, $cx + ay + b = 0$ 이 일치할 때, 이 직선과
평행하며, 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x - y = 1$
- ② $2x + y = 5$
- ③ $2x - y = 3$
- ④ $x + 2y = 5$
- ⑤ $x + y = 3$

해설

$ax + by + c = 0 \Rightarrow$
 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{1}$
 $cx + ay + b = 0 \Rightarrow$
 $y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로 $-\frac{a}{b} = -\frac{c}{a}, -\frac{c}{b} = -\frac{b}{a}$
 $a^2 = bc, b^2 = ac$
 $\therefore c = \frac{a^2}{b}, c = \frac{b^2}{a}$
 $\therefore \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{a}$
 $\therefore a^3 = b^3 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$
 $\therefore a = b \ (\because a^2 + ab + b^2 \neq 0)$
 $\therefore c = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{a} = a$
 $\therefore a = b = c$
 $\therefore \textcircled{1} : x + y + 1 = 0, y = -x - 1$
 $\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1
 $\therefore$ 구하는 직선 : $y - 1 = (-1)(x - 2)$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$

9. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로 삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이 서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나 세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

10. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

$$\text{직선 AB 의 기울기는 } \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3)을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

11. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

12. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

- ① $-2 < m < 2$
- ② $-2 < m < 3$
- ③ $-1 < m < 2$
- ④ $1 < m < 4$
- ⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로
위의 직선은 m 의 값에 관계없이
점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고
 $(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로
따라서 $1 < m < 4$

13. 두 직선 $x + y = 1$, $ax + 2y + a + 2 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x + y = 1 \cdots \textcircled{1}$
 $ax + 2y + a + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 : (a - 2)x + a + 4 = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{a + 4}{2 - a}$
 $\Rightarrow y = 1 - x = \frac{2a + 2}{a - 2}$
 $\therefore \text{교점} : \left(\frac{a + 4}{2 - a}, \frac{2a + 2}{a - 2} \right)$
교점이 제 1 사분면에 있으므로
 $\frac{a + 4}{2 - a} > 0, \frac{2a + 2}{a - 2} > 0$
두 식의 양변에 $(a - 2)^2$ 을 곱하면
 $(a - 2)(a + 4) < 0, 2(a + 1)(a - 2) > 0$
 $\Rightarrow -4 < a < 2, a < -1 \text{ or } a > 2$
 $\therefore -4 < a < -1$
 $\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

14. 원점을 지나고, 점 (2, 1)에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$

② $y = -\frac{2}{3}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$

⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,

(2, 1)에서의 거리가 1 이므로

$$\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}, k(3k - 4) = 0$$

$$k = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x$$

15. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

16. 기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 2(x - 2), \therefore y = 2x - 3 \cdots \textcircled{1}$$

①에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = 2x - 3, \therefore x = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

x 축과 만나는 점 A 의 좌표는

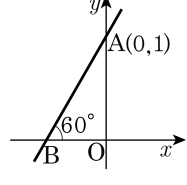
$$A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

①의 y 절편이 -3 이므로 y 축과

만나는 점 B 는 B(0, -3)

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (-3 - 0)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

17. 다음 그림과 같이 점 A(0, 1) 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



- ① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
 ④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루므로

직선 l 의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

또한 직선 l 은 점 A(0, 1) 을 지나므로

$$y - 1 = \sqrt{3}(x - 0)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x + 1$$

이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로

$$0 = \sqrt{3}x + 1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

18. x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이고, 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선이 점 $(a, 7)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 축 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 1 이다.

$(-1, 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식은

$$y = (x + 1) + 2 = x + 3$$

$(a, 7)$ 을 대입하면, $7 = a + 3$, $a = 4$

19. 점 $(0, 2)$ 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 30° 인 직선의 방정식은?

- ① $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = 2x + 2$
④ $y = x + 3$ ⑤ $y = x + 4$

해설

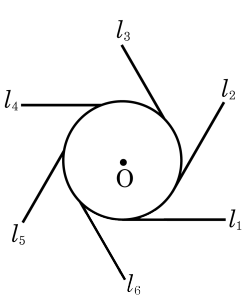
기울기 $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

점 $(0, 2)$ 를 지나므로,

$$y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

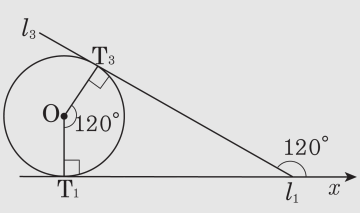
20. 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. l_1 의 기울기가 0 일 때, l_3 의 기울기는?



- ① -3
 ② $-\sqrt{3}$
 ③ -1
- ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

문제의 조건에서 l_1 의 기울기가 0 이므로
 다음 그림과 같이 l_1 을 x 축으로 놓으면,
 l_3 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 120° 이다.
 따라서 구하는 기울기 m 은
 $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

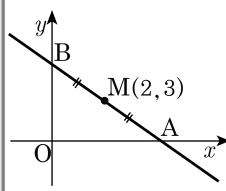


21. 직선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l 의 방정식은?

- ① $y = -2x + 2$ ② $y = -\frac{3}{2}x + 3$ ③ $y = -\frac{2}{3}x + 2$
④ $y = -\frac{3}{2}x + 6$ ⑤ $y = \frac{2}{3}x + 6$

해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로
A(4, 0), B(0, 6) 직선 l 의 x 절편이 4, y
절편이 6이므로
직선의 방정식은 $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + 1$ 이다.
 $\therefore y = -\frac{3}{2}x + 6$



22. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

- ㉠ 점 $(0, 5)$ 를 지나고, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선 $\rightarrow y = x + 5$
- ㉡ 두 점 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$
- ㉢ x 절편이 2 , y 절편이 -2 인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ (기울기) $=\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고 y 절편이 5 이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$
- ㉡ $y + 1 = \frac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore y = -2x + 1$
- ㉢ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$, $\therefore y = x - 2$
- 따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

23. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

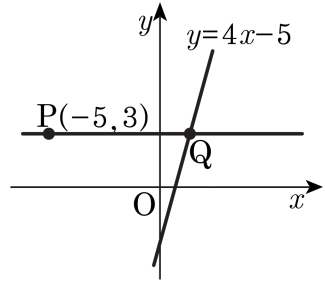
▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

24. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q 의 y 좌표가 3이므로

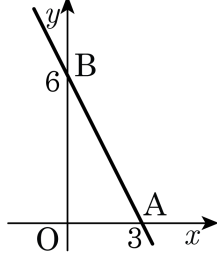
$$y = 4x - 5 \text{에 } y = 3 \text{을 대입하면 } 3 = 4x - 5$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 점 Q 의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

$$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$$

25. x 축, y 축 및 직선 $y = -2x + 6$ 으로 둘러싸인 $\triangle OAB$ 의 넓이를 3등분하고, 원점을 지나는 두 직선의 방정식은 $y = ax$ 와 $y = bx$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원점을 지나며 $\triangle OAB$ 의 넓이를 3등분하는 직선은 $\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점과 2 : 1로 내분하는 점 $(2, 2)$ 와 $(1, 4)$ 를 각각 지난다.
두 점 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = x$ 이고,
두 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = 4x$ 이다.
그러므로 $a + b = 1 + 4 = 5$

26. 세 점 A(-1, -1), B (3, -5), C (1, 7)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여, 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 할 때, $m + n$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

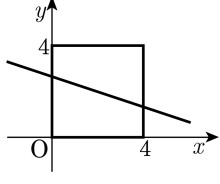
점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 변 BC의 중점 M(2, 1)을 지난다.
따라서 구하는 직선은 두 점 A(-1, -1), M(2, 1)을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = \frac{1 - (-1)}{2 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\therefore m + n = \frac{1}{3}$$

27. 직선의 방정식 $ax+2y-5=0$ 이 다음 그림과 같이 정사각형의 넓이를 이등분 할 때, a 의 값은 얼마인가?



- ① 2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 직선이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 정사각형 대각선의 교점인 중심 $(2,2)$ 를 지나야 한다.

$ax+2y-5=0$ 에서 $2a+4-5=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

28. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
 $px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{㉠}$,
 $p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 이라 하자.
 $\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 은 서로 직교하므로
 $pp' + qq' = 0$ 이다.
(준식) $= (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$ 의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
 $pp' + qq' = 0$ 이므로 $a + 2 = pp' + qq' = 0$
 $\therefore a = -2$
 $a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
 $= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉢}$ 이 두 직선의 곱을 나타내므로
 $\textcircled{㉢}$ 의 판별식 $D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$
 $= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{㉣}$ 이 완전제곱식이다.
따라서 $\textcircled{㉣}$ 의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.
 $\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

29. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 이 직선 $bx - 2y + 1 = 0$ 과는 평행이고, 직선 $3x + (b - 1)y - 2 = 0$ 과는 수직이다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치하고 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow \text{ i) } -\frac{1}{a} = \frac{b}{2} \quad \text{ ii) } -\frac{1}{a} \times \frac{-3}{b-1} = -1$$

i), ii) 를 연립하면,

$$a = 1 \quad b = -2$$

$$\therefore a + b = -1$$

30. $ax + 8y = 4$, $x + (a + 2)y = -7$ 에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 하나도 없을 때, 실수 a 의 값은?

① $a = -4$, $b = -2$

② $a = -4$, $b = 2$

③ $a = 4$, $b = -2$

④ $a = 4$, $b = 2$

⑤ $a = 1$, $b = -2$

해설

두 직선 $ax + 8y - 4 = 0$, $x + (a + 2)y + 7 = 0$ 이 평행해야 한다.

$$\text{그러므로 } \frac{a}{1} = \frac{8}{a+2} \neq -\frac{4}{7}$$

$$a(a+2) = 8 \quad \left(a \neq -\frac{4}{7}, a \neq -16 \right)$$

$$\therefore a = -4, 2$$

31. 두 점 A(-1, 3), B(5, -3) 을 이은 선분의 수직이등분선의 방정식을 구하면?

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = x + 2$

㉢ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

㉣ $y = 3x + \frac{1}{2}$

㉤ $y = 3x - \frac{1}{2}$

해설

수직이등분선은 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직하다.

$$\Rightarrow \text{중점은 } \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right)$$

$$\overline{AB} \text{ 의 기울기는 } \frac{-3-3}{5-(-1)} = -1$$

$\therefore$ 기울기가 1 이고, 점 (2, 0) 을 지난다.

$$\Rightarrow y = x - 2$$

32. 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ 의 교점을 지나고 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

- ① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$

이 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = m(x + 2) + 3$$

원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow (2m + 3)^2 = 4(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow m = -\frac{5}{12} \quad \dots \text{기울기}$$

33. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$

즉, $x - 3y = 0$, $3x + y - 2 = 0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$\therefore y = \frac{1}{3}x$

34. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

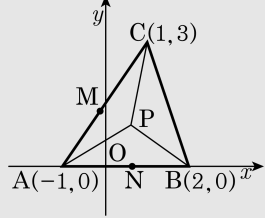
$$\therefore 3x - 4y = 0$$

35. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



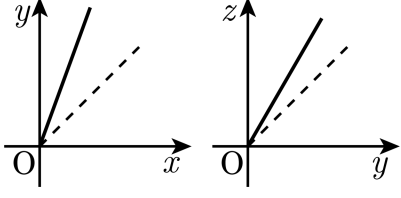
$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

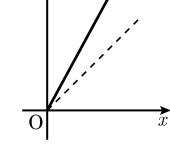
$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

36. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

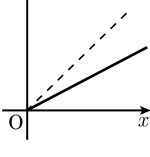


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

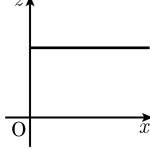
①



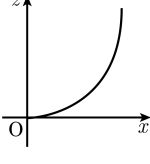
②



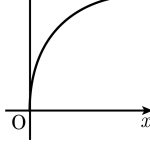
③



④



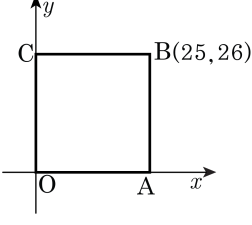
⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$
 $\therefore z = b(ax) = abx \ (ab > 1)$
 따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

37. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부 (경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

(8, 4), (16, 7), (24, 10)으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

38. 세 직선 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$, $5x - ky - 15 = 0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?
- ① $-5 \leq k \leq 5$, $k < -10$ ② $k = -10$, $k = \pm 5$
③ $-10 \leq k \leq -5$, $k \geq 5$ ④ $k \neq -10$, $k \neq \pm 5$
⑤ $-5 \leq k \leq -5$, $k \geq 5$

해설

$$\begin{cases} x - y = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x + y - 2 = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ 5x - ky - 15 = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점은 $(1, 1)$ 이 $\textcircled{3}$ 위에 있지 않다.

$$\therefore 5 - k - 15 \neq 0 \quad \therefore k \neq -10$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{5} \neq \frac{-1}{-k} \rightarrow k \neq 5$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 도 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{5} \neq \frac{1}{-k} \rightarrow k \neq -5$$

$$\therefore k \neq -10, k \neq \pm 5$$

39. 점 (a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx - ay = 1$ 이 항상 지나는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

(a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직이므로

$$3a + 2b = 6$$

$$\therefore b = 3 - \frac{3}{2}a \cdots \text{㉠}$$

㉠을 $2bx - ay = 1$ 에 대입하면

$$2\left(3 - \frac{3}{2}a\right)x - ay = 1$$

$$(6 - 3a)x - ay = 1$$

$$(6x - 1) - (3x + y)a = 0$$

$$\therefore 6x - 1 = 0, 3x + y = 0$$

$$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

40. y 축 위의 한 점 P 로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(-1, 2)$

③ $(0, 2)$

④ $(0, 1)$

⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 $P(0, y)$ 라 하면 직선

$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-8y = -8 \therefore y = 1$$

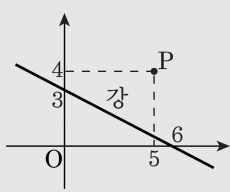
$\therefore P(0, 1)$

41. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O로부터 동쪽으로 6 km, 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O로부터 동쪽으로 5 km, 북쪽으로 4 km의 위치에 마을 P가 있다. 이 때, 마을 P에서 강까지의 최단 거리를 구하시오. (단위는 km)

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O를 원점 O로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.
강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,
 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$
이때, 마을 P의 좌표는 (5, 4)이다.
따라서, 점 (5, 4)에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면
 $\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} (km)$



42. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

43. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

44. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

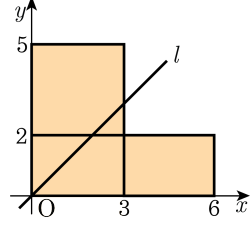
45. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x - y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $3x - 4y + 9 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $4x + 3y + 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $x = 5, y = 6$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $x = 0, y = -4$
 $\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $x = -3, y = 0$
세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 이루어지는 삼각형은 세 점 $A(5, 6), B(0, -4), C(-3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.
따라서 점 $(5, 6)$ 과 직선 $4x + 3y + 12 = 0$
사이의 거리는 $\frac{|4 \times 5 + 3 \times 6 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|50|}{5} = 10$
또, $\overline{BC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = 5$
따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$

46. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 원점을 지나는 직선 l 이 이등분할 때, 직선 l 의 기울기를 구하면?

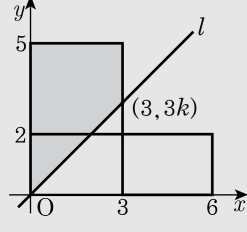


▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직선 l 을 $y = kx$ 라 하자.



위의 그림에서 전체 넓이는 $3 \cdot 5 + (6 - 3) \cdot 2 = 21$ 이고

어두운 부분의 넓이는 $\{5 + (5 - 3k)\} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ 이다.

직선 l 이 전체 넓이를 이등분하므로

$$\frac{21}{2} = \frac{3(10 - 3k)}{2}, k = 1$$

$\therefore$ 기울기는 1

47. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

- i. l 과 l' 은 만나지 않는다.

ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l, l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $AB = \sqrt{13}$ 이다.

iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

- ① $2x - 3y + 15 = 0$

② $2x - 3y - 13 = 0$

③ $2x - 3y - 11 = 0$

④ $3x + 2y + 11 = 0$

⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

- i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
 $l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $AB = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1, 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.
즉, $\frac{|-2 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}, |-2 + c| = 13$
 $-2 + c = \pm 13 \quad \therefore c = 15$ 또는 $c = -11$
 $\therefore l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5, -\frac{11}{3}$ 중에서
 l 의 y 절편 $\frac{2}{3}$ 보다 작은 것은
 $-\frac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
 l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

48. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

- ① 18
- ② 24
- ③ 30
- ④ 32
- ⑤ 36

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 로 놓으면
 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$
 $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$
 $\therefore \triangle ABC =$
 $\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
 $= \frac{1}{2}|5(2 - (-4)) + 1((-4) - 6) + 7(6 - 2)|$
 $= 24$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4배임을 이용한다.

49. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b) , 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

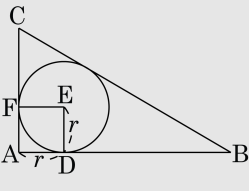
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연결하여 세 점의 좌표를 구한다.

$$A = (6, 8) \quad B = (2, 4) \quad C = (3, 11)$$

$$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\angle CAB = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.



$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2} \therefore r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 1 : 3 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4} \right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 1 : 2 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3} \right) = (5, 9)$$

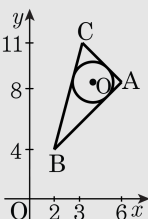
$\square ADEF$ 는 정사각형이므로 $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로의 이동도 마찬가지이다.

$$\therefore E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 $A(6, 8), B(2, 4), C(3, 11)$

원의 중심의 좌표 $O(a, b)$ 이므로

$$2 < a < 6, 4 < b < 11 \dots \textcircled{1}$$

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}} = r \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\textcircled{1}$ 의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a = 4, b = 8$ 이고

$$\text{다시 } \textcircled{2} \text{에 대입하면, } r = \sqrt{2}, \therefore a+b+r^2 = 14$$

50. 직선 $y = m_1x$ 의 기울기 m_1 은 0이 아닌 유리수이다. 이 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분한 직선을 $y = m_2x$ 라 한다. m_2 가 유리수일 때, 다음 중 m_1 의 값이 될 수 있는 것은?

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$y = m_1x$ 와 x 축의 이등분선이므로

$y = m_2x$ 위의 점에서 $y = m_1x$ 와 x 축에 이르는 길이는 같다.

$\Rightarrow y = m_2x$ 위의 점을 $(\alpha, m_2\alpha)$ 라 하면,

$$\frac{|\alpha m_1 - m_2 \alpha|}{\sqrt{m_1^2 + 1}} = |m_2 \alpha|$$

$$\Rightarrow m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = m_2^2m_1^2 + m_2^2$$

$$\Rightarrow (m_2^2 - 1)m_1^2 + 2m_1m_2 = 0$$

$$\Rightarrow (m_2^2 - 1)m_1 + 2m_2 = 0 (\because m_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow m_1m_2^2 + 2m_2 - m_1 = 0$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_1^2}}{m_1}$$

여기에서 m_2 가 유리수가 되기 위해서는 근호 안 $1 + m_1^2$ 의 값이 완전제곱수가 되어야 한다.

주어진 값 중 이 조건을 만족하는 것은 $m_1 = \frac{5}{12}$ 뿐이다.