1. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

2. 일차함수 $y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a - 2 = \tan 45° = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
$b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
$\therefore\ a + b = 6$

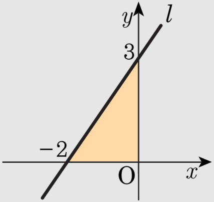
3. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$

4. 세 점 $\mathrm{A}(1, 4)$, $\mathrm{B}\ (-1, 2)$, $\mathrm{C}\ (5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2 ② 8 ③ 10 ④ −2 ⑤ −4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

5. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면

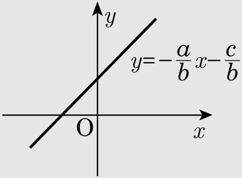
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$



$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로

$ab \cdot ac = a^2bc < 0$

따라서 $bc < 0$

$$(y\ \text{절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

6. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다 ② 1 개 ③ 2 개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$(x+y-1)(x-y-1) = 0$

$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$

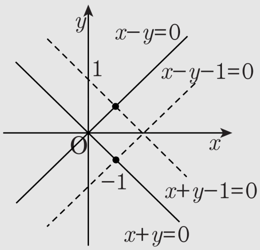
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는

두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$

$x^2-y^2-2x+1 = 0$ 는 두 직선 $x+y-1 = 0$, $x - y = 0$

위의 점이므로 다음 그림에서

교점의 개수는 2개



7. 두 직선 $ax-2y+2=0$, $2x+by+c=0$이 점 $(2,\ 4)$에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c의 값으로 옳은 것은?

① $a=-3,\ b=3,\ c=-11$
② $a=-3,\ b=3,\ c=-12$
③ $a=3,\ b=-3,\ c=-13$
④ $a=3,\ b=3,\ c=-15$
⑤ $a=3,\ b=3,\ c=-16$

해설

(i) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1이다.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}\times\left(-\frac{2}{b}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \quad a=b$$

(ii) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$를 지난다.

$$\Rightarrow \quad 2a-8+2=0,\quad 4+4b+c=0$$

(i), (ii) 를 연립하면, $a=3,\ b=3,\ c=-16$

8. 두 직선 $ax+by+c=0$, $cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$ ② $2x+y=5$ ③ $2x-y=3$

④ $x+2y=5$ ⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \cdots ㉠$

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a} \cdots ㉡$

㉠,㉡이 일치하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{c}{a},\ -\frac{c}{b}=-\frac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}\ ,\ c=\frac{b^2}{a}$

$\therefore \frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2\neq 0\ )$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ $: x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

9. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

10. 점 $A(-2,1)$, $B(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

11. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow \ (1,3), (2,-1)$ 을 지나는 직선

$$y=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$$

$\Rightarrow \ y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore \ ab=-28$

12. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$ ② $-2<m<3$ ③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$ ⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$ ①에서

$m(x+2)-(y+5)=0$이므로

위의 직선은 m의 값에 관계없이

점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.

따라서 두 직선이 제 1사분면에서

만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을

잇는 선분의 사이를 지나면 된다.

직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고

$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로

따라서 $1<m<4$

13. 두 직선 $x+y=1$, $ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots$ ㉠

$ax+2y+a+2=0 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ × 2 : $(a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

$\therefore$ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a}, \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0,\ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0,\ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2,\ a<-1\ or\ a>2$

$\therefore \quad -4<a<-1$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

14. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$　② $y = -\frac{2}{3}x$　③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$　⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx(k \neq 0)$ 이라 하면,

$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 이므로

$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1,\ |2k-1| = \sqrt{k^2+1},\ k(3k-4) = 0$

$k = \frac{4}{3}\ (\because k \neq 0)$

$\therefore\ y = \frac{4}{3}x$

15. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

주어진 조건에서,

$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$

$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$

$2x^2-2x+2y^2+6y+14$

$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$

$18x+18y-54=0$

$\Rightarrow\quad x+y-3=0$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

16. 기울기가 2 이고 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

① $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=2(x-2)$, $\therefore\ y=2x-3\cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$0=2x-3$, $\quad\therefore\ x=\dfrac{3}{2}$ 이므로

x 축과 만나는 점 A 의 좌표는

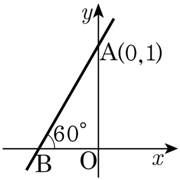
$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

㉠의 y 절편이 -3 이므로 y 축과

만나는 점 B 는 $\mathrm{B}(0,\ -3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-\dfrac{3}{2})^2+(-3-0)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

17. 다음 그림과 같이 점 A(0, 1) 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60°$ 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60°$ 를 이루므로
직선 l 의 기울기는 $\tan 60° = \sqrt{3}$
또한 직선 l 은 점 A(0, 1) 을 지나므로
$y - 1 = \sqrt{3}(x - 0)$
$\therefore y = \sqrt{3}x + 1$
이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로
$0 = \sqrt{3}x + 1$
$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

18. x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 이고, 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선이 점 $(a,\ 7)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 축 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 인 직선의 기울기는 1 이다.
$(-1,\ 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식은
$y=(x+1)+2=x+3$
$(a,7)$ 을 대입하면, $7=a+3, \quad a=4$

19. 점 (0, 2) 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 30° 인 직선의 방정식은?

① $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$　② $y=x+2$　③ $y=2x+2$

④ $y=x+3$　⑤ $y=x+4$

해설

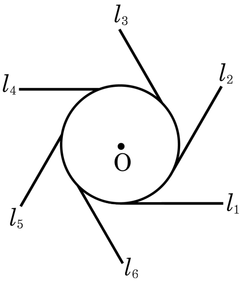
기울기 $m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

점 (0, 2) 를 지나므로,

$$y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-0)$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$$

20. 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. l_1, l_2, $\cdots$, l_6 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. l_1 의 기울기가 0 일 때, l_3 의 기울기는?

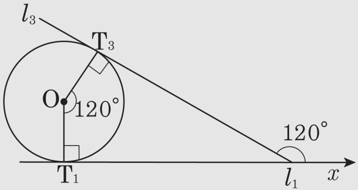


① -3 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1

④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

해설

문제의 조건에서 l_1 의 기울기가 0 이므로
다음 그림과 같이 l_1 을 x 축으로 놓으면,
l_3 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $120°$ 이다.
따라서 구하는 기울기 m 은
$m = \tan 120° = -\sqrt{3}$



21. 직선 l 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l의 방정식은?

① $y=-2x+2$　② $y=-\frac{3}{2}x+3$　③ $y=-\frac{2}{3}x+2$

④ $y=-\frac{3}{2}x+6$　⑤ $y=\frac{2}{3}x+6$

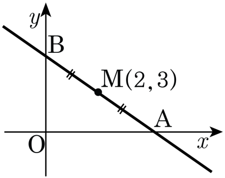
해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로

A(4, 0), B(0, 6) 직선 l의 x절편이 4 , y 절편이 6 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+1$이다.

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+6$



22. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 <u>모두</u> 고르면?

> ㉠ 점 $(0, 5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 → $y = x + 5$
>
> ㉡ 두 점 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$을 지나는 직선 → $y = -2x + 1$
>
> ㉢ x 절편이 2, y절편이 -2인 직선 → $y = 2x - 2$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ (기울기)$= \tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$

㉡ $y + 1 = \dfrac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore\ y = -2x + 1$

㉢ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$, $\therefore\ y = x - 2$

따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

23. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

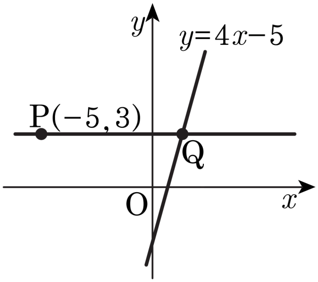
▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0,\frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ a=2$

24. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는?

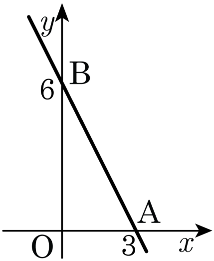


① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q 의 y좌표가 3이므로
$y = 4x - 5$에 $y = 3$을 대입하면 $3 = 4x - 5$
$\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = 2 - (-5) = 7$

25. x축, y축 및 직선 $y = -2x+6$으로 둘러싸인 $\triangle$OAB의 넓이를 3등분하고, 원점을 지나는 두 직선의 방정식은 $y = ax$와 $y = bx$이다. 이 때, $a+b$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원점을 지나며 $\triangle$OAB의 넓이를 3등분하는 직선은
$\overline{\text{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점과
$2:1$로 내분하는 점 $(2,\ 2)$와 $(1,\ 4)$를 각각 지난다.
두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = x$이고,
두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = 4x$이다.
그러므로 $a+b = 1+4 = 5$

26. 세 점 A$(-1,\ -1)$, B$(3,\ -5)$, C$(1,\ 7)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여, 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, $m+n$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

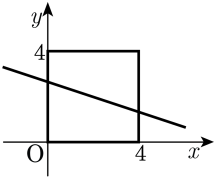
점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를
이등분하는 직선은 변 BC의 중점 M$(2,\ 1)$을 지난다.
따라서 구하는 직선은 두 점 A$(-1,\ -1)$, M$(2,\ 1)$을 지나므로
구하는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore\ y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ m+n=\frac{1}{3}$$

27. 직선의 방정식 $ax+2y-5=0$이 다음 그림과 같이 정사각형의 넓이를 이등분 할 때, a의 값은 얼마인가?



① 2　　② -1　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 직선이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 정사각형 대각선의 교점인 중심 $(2,2)$를 지나야 한다.

$ax+2y-5=0$에서 $2a+4-5=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

28. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을

$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠,

$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.

㉠과 ㉡은 서로 직교하므로

$pp'+qq'=0$이다.

(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의 전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은

$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$

$\therefore\ a=-2$

$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면

(준식)

$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢

㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로

㉢의 판별식 $D_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$

$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.

따라서 ㉣의 판별식 $\frac{D_2}{4}$는 0이다.

$$\frac{D_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$$

$\therefore\ b=-4$

$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

29. 직선 $x+ay-1=0$ 이 직선 $bx-2y+1=0$ 과는 평행이고, 직선 $3x+(b-1)y-2=0$ 과는 수직이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치하고 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\Rightarrow$ ⅰ) $-\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{2}$ ⅱ) $-\dfrac{1}{a}\times\dfrac{-3}{b-1}=-1$

ⅰ), ⅱ) 를 연립하면,

$a=1 \quad b=-2$

$\therefore \quad a+b=-1$

30. $ax+8y=4,\ x+(a+2)y=-7$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없을 때, 실수 a의 값은?

① $a=-4,\ b=-2$

② $a=-4,\ b=2$

③ $a=4,\ b=-2$

④ $a=4,\ b=2$

⑤ $a=1,\ b=-2$

해설

두 직선 $ax+8y-4=0,\ x+(a+2)y+7=0$이 평행해야 한다.

그러므로 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{8}{a+2}\neq-\dfrac{4}{7}$

$a(a+2)=8\quad\left(a\neq-\dfrac{4}{7},\ a\neq-16\right)$

$\therefore\ a=-4,\ 2$

31. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(5,\ -3)$ 을 이은 선분의 수직이등분선의 방정식을 구하면?

① $y = x - 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

④ $y = 3x + \frac{1}{2}$ ⑤ $y = 3x - \frac{1}{2}$

해설

수직이등분선은 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직하다.

$\Rightarrow$ 중점은 $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right)$

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{-3-3}{5-(-1)} = -1$

$\therefore$ 기울기가 1 이고, 점 $(2,\ 0)$ 을 지난다.

$\Rightarrow$ $y = x - 2$

32. 두 직선 $x+y-1=0$, $2x-y+7=0$ 의 교점을 지나고 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

① $\frac{5}{8}$　② $-\frac{5}{8}$　③ $\frac{5}{9}$　④ $-\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$

이 점을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x+2)+3$

원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$\Rightarrow \quad (2m+3)^2=4(m^2+1)$$

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{5}{12} \quad \cdots \quad \text{기울기}$$

33. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$P(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

34. 정점 A$(1,\ 2)$와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 P$(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

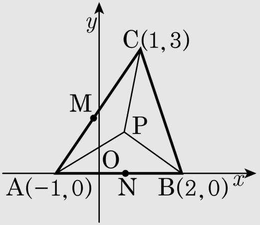
$\therefore 3x-4y=0$

35. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$이 있다. $\triangle ABC$의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



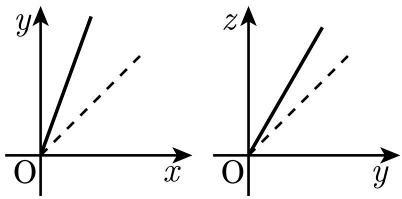
$\therefore\ \triangle BPC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

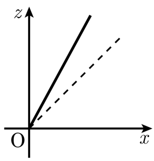
그런데 $M\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

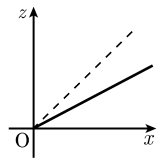
점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

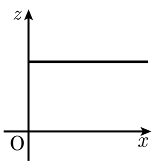
36. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

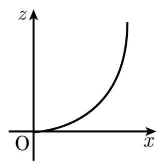


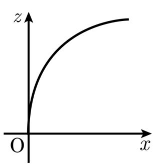
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

① 

② 

③ 

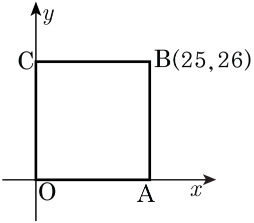
④ 

⑤ 

해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

37. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25,\ 0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8,\ 4),\ (16,\ 7),\ (24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

38. 세 직선 $x-y=0,\ x+y-2=0,\ 5x-ky-15=0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

① $-5 \le k \le 5,\ k < -10$

② $k=-10,\ k=\pm 5$

③ $-10 \le k \le -5,\ k \ge 5$

④ $k \ne -10,\ k \ne \pm 5$

⑤ $-5 \le k \le -5,\ k \ge 5$

해설

$$\begin{cases} x-y=0 & \cdots ㉠ \\ x+y-2=0 & \cdots ㉡ \\ 5x-ky-15=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고 어느 두 직선도평행하지 않아야 하므로

㉠, ㉡ 의 교점은 $(1,\ 1)$ 이 ㉢ 위에 있지 않다.

$\therefore\ 5-k-15 \ne 0 \quad \therefore\ k \ne -10$

㉠, ㉢ 은 평행하지 않으므로

$\dfrac{1}{5} \ne \dfrac{-1}{-k} \to k \ne 5$

㉡, ㉢ 도 평행하지 않으므로

$\dfrac{1}{5} \ne \dfrac{1}{-k} \to k \ne -5$

$\therefore\ k \ne -10,\ k \ne \pm 5$

39. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로

$3a+2b=6$

$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a \cdots$ ㉠

㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면

$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$

$(6-3a)x-ay=1$

$(6x-1)-(3x+y)a=0$

$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$

$x=\frac{1}{6},\quad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

40. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① $(1, -2)$　② $(-1, 2)$　③ $(0, 2)$
④ $(0, 1)$　⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선
$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$
과 점 P 사이의 거리는

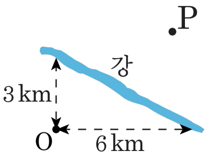
$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면
$-8y = -8 \therefore y = 1$
$\therefore P\ (0, 1)$

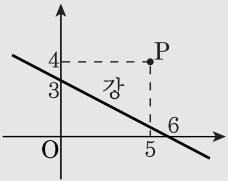
41. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

42. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0$, $x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$ 정리하면

$\begin{cases} y=\frac{2}{a}x-\frac{2}{a} \\ y=\frac{1}{a-3}x-\frac{3}{a-3} \end{cases}$ 평행하므로

$\frac{2}{a}=\frac{1}{a-3}$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$ 과 $x-3y-3=0$ 과의 거리는

$\therefore\ \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

43. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2　② -1 또는 2　③ 4

④ -2 또는 4　⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

44. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

45. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

$3x-4y+9=0 \cdots\cdots$ ㉡

$4x+3y+12=0 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$

세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는

삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.

따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$

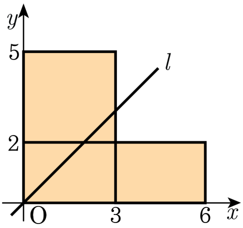
사이의 거리는 $\dfrac{|4\times5+3\times6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|50|}{5}=10$

또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$

따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

46. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 원점을 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 기울기를 구하면?

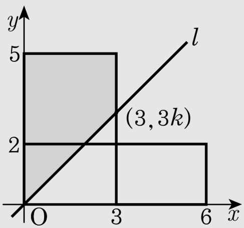


▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직선 l을 $y = kx$라 하자.



위의 그림에서 전체넓이는 $3 \cdot 5 + (6 - 3) \cdot 2 = 21$이고

어두운 부분의 넓이는 $\{5 + (5 - 3k)\} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$이다.

직선l이 전체 넓이를 이등분하므로

$$\frac{21}{2} = \frac{3(10 - 3k)}{2},\ k = 1$$

$\therefore$ 기울기는 1

47. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x-3y+2=0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

i. l 과 l' 은 만나지 않는다.
ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 이다.
iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x-3y+15=0$
② $2x-3y-13=0$
③ $2x-3y-11=0$
④ $3x+2y+11=0$
⑤ $3x+2y+13=0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x-3y+c=0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.

즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$, $|-2+c|=13$

$-2+c=\pm 13 \quad \therefore\ c=15$ 또는 $c=-11$

$\therefore\ l' : 2x-3y+15=0$ 또는 $l' : 2x-3y-11=0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서
l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은
$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
l' 의 방정식은 $l' : 2x-3y-11=0$

48. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3,\ 4)$, $Q(4,\ -1)$, $R(6,\ 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 로 놓으면
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
$P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6,\ 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 7$
$y_1 = 6,\ y_2 = 2,\ y_3 = -4$
$\therefore \triangle ABC =$
$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$
$$= \frac{1}{2}|5(2 + 4) + (-4 - 6) + 7(6 - 2)|$$
$$= 24$$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4 배임을 이용한다.

49. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b), 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 14

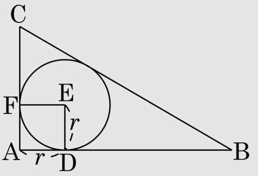
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연립하여 세 점의 좌표를 구한다.

$A = (6, 8)$ $B = (2, 4)$ $C = (3, 11)$

$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$

즉, $\angle CAB = 90°$ 인 직각 삼각형이다.



$\Rightarrow$ $3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2}$ $\therefore$ $r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 $1 : 3$ 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2 + 18}{4}, \frac{4 + 24}{4}\right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 $1 : 2$ 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3 + 12}{3}, \frac{11 + 16}{3}\right) = (5, 9)$$

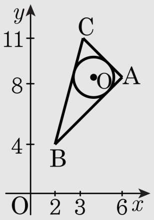
□ADEF 는 정사각형이므로 $\overline{AF} // \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$\therefore$ $E = (5 - 1, 7 + 1) = (4, 8) \Rightarrow$ $a + b + r^2 = 4 + 8 + (\sqrt{2})^2 = 14$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6, 8), B(2, 4), C(3, 11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$2 < a < 6,\ 4 < b < 11 \cdots$ ㉠

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a + b - 14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a - b - 10|}{5\sqrt{2}} = r \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ㉠의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a = 4$, $b = 8$ 이고

다시 ㉡에 대입하면, $r = \sqrt{2}$, $\therefore$ $a + b + r^2 = 14$

50. 직선 $y = m_1x$ 의 기울기 m_1 은 0이 아닌 유리수이다. 이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분한 직선을 $y = m_2x$ 라 한다. m_2 가 유리수일 때, 다음 중 m_1 의 값이 될 수 있는 것은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$y = m_1x$와 x축의 이등분선이므로

$y = m_2x$ 위의 점에서 $y = m_1x$ 와 x 축에 이르는 길이는 같다.

$\Rightarrow \quad y = m_2x$ 위의 점을 $(\alpha, m_2\alpha)$ 라 하면,

$$\frac{|\alpha m_1 - m_2\alpha|}{\sqrt{m_1^2+1}} = |m_2\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = m_2^2m_1^2 + m_2^2$$

$$\Rightarrow \quad (m_2^2-1)m_1^2 + 2m_1m_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m_2^2-1)m_1 + 2m_2 = 0(\because m_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad m_1m_2^2 + 2m_2 - m_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m_1^2}}{m_1}$$

여기에서 m_2 가 유리수가 되기 위해서는 근호 안 $1+m_1^2$ 의 값이 완전제곱수가 되어야 한다.

주어진 값 중 이 조건을 만족하는 것은 $m_1 = \frac{5}{12}$ 뿐이다.