1. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4,\ n\text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$　② $4 \in A$　③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$　⑤ $17 \in A$

해설

$A = \{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

2. 세 집합
$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,
$B=\left\{x \mid x\text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\right\}$,
$C=\left\{x \mid x\text{는 } 15\text{의 약수}\right\}$ 일 때,
$n(A)+n(B)+n(C)$ 의 값을 구하여라.

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$
$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$
$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=5+8+4=17$

3. 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in A$ ② $\varnothing \subset A$ ③ $\{1,\ 2\} \in A$
④ $2 \in A$ ⑤ $\{\varnothing,\ 1\} \subset A$

해설

$\{2\}$라는 집합을 원소로 가지고 있는 것이지 2를 원소로 가지고 있는 것은 아니다.

4. 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여
$A = \left\{x|x\text{는 } 8\text{의 약수}\right\}$,
$B = \left\{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 자연수}\right\}$,
$C = \left\{x|x\text{는 한 자리 짝수인 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $B \subset A$ ② $A \subset C$ ③ $C \subset B$
④ $A \not\subset B$ ⑤ $A = C$

해설
$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$,
$C = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로
$C \subset B$ 이다.

5. 집합 $A=\{1,2,3,4\}$ 일 때, 다음 중 A 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\{1\}$ ② $\varnothing$ ③ $\{1,2,4\}$

④ $\{0\}$ ⑤ $\{1,2,3,4\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

6. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$에서 a, c를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

이것은 집합 $\{b, d\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $\varnothing$, $\{b\}$, $\{d\}$, $\{b, d\}$의 4개이다.

7. 세 집합 $A=\{2,5,6,9,12\}$, $B=\{1,7,9,10,12\}$, $C=\{2,5,6,7,9,10\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A\cap B=\{9,12\}$
② $B\cup C=\{1,2,5,6,7,9,10\}$
③ $A\cup C=\{2,5,6,7,9,10,12\}$
④ $(A\cap B)\cup C=\{2,5,6,7,9,10,12\}$
⑤ $A\cap(B\cup C)=\{2,5,6,9,12\}$

해설

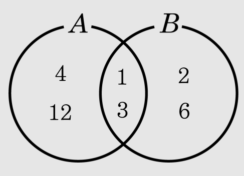
② $B\cup C=\{1,2,5,6,7,9,10,12\}$

8. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$이고, $A \cup B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $A \cap B = \{x \mid x$는 3이하의 홀수$\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

① 4　　② 5　　③ 13　　④ 16　　⑤ 20

해설

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $A \cap B = \{1,\ 3\}$



$\therefore A = \{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$

따라서 집합 A 의 원소의 합은 $1 + 3 + 4 + 12 = 20$

9. $U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ 일 때, $(A-B)^c$ 은?

① $\{3, 5\}$ ② $\{3, 7\}$ ③ $\{3, 5, 7, 11\}$
④ $\{3, 5, 7, 9\}$ ⑤ $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

해설

$A-B=\{1,\ 9\}$ 이므로 $(A-B)^c = (\{1,\ 9\})^c = \{3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ 이다.

10. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{2, 4, 5, 8\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{5\}$ ③ $\{8\}$ ④ $\{1, 5\}$ ⑤ $\{1, 8\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 8\} - \{2, 4, 8\} = \{1, 5\}$ 이다.

11. $U = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 7\}$, $B = \{1, 2, 7, 8\}$ 에 대하여 $B - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{8\}$ ③ $\{1, 8\}$ ④ $\{4, 7\}$ ⑤ $\{4, 8\}$

해설

$B - (A \cap B) = B - A = \{1, 2, 7, 8\} - \{2, 4, 7\} = \{1, 8\}$ 이다.

12. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 8\}$ 일 때, $(A - B) \subset X,\ X - A = \varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$,즉 $\{5,\ 7\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

13. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a^2+2\}$, $B=\{1, 2a-3, 2a+1\}$에 대하여 $A\cap B=\{1,3\}$이 되도록 할 때, a값을 구하여라.

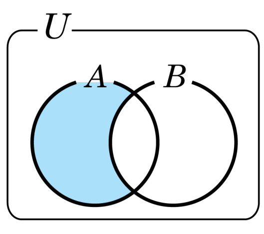
▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

해설

$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로 집합
A에서 $a^2+2=3$, 따라서 $a=\pm 1$
i) $a=1$ 이면 $B=\{-1,1,3\}$
ii) $a=-1$ 이면 $B=\{-5,-1,1\}$
$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로
$\therefore a=1$

14. $n(U) = 20, n(B - A) = 6, n(B) = 8, n(A^c) = 6$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$n(B) = 8, n(B - A) = 6$ 이므로 $n(A \cap B) = 2$ 이다.
$n(A^c) = 6$ 이므로 $n(A) = n(U) - n(A^c) = 20 - 6 = 14$ 이다.
따라서 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 2 = 12$ 이다.

15. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $P^c \subset Q$　③ $Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$　⑤ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$P \subset Q^c$

$\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$

$\Leftrightarrow Q \subset P^c$

16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $\{1,\ 3\} \cap X = \phi$ 를 만족하는 A 의 진부분집합 X 의 개수는?

① 7 개　② 15 개　③ 16 개　④ 31 개　⑤ 32 개

해설

집합 X 가 원소 1, 3 을 포함하지 않으므로 A 의 진부분집합 X 의 개수는 $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면 된다.
$\therefore\ 2^4 = 16$ (2^n : 부분집합의 개수, n : 원소의 개수)
따라서, 진부분집합은 $16 - 1 = 15$(개) 이다.

17. x, y, z 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

② x, y, z 는 서로 다르다.

③ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$

⑤ x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$
즉, x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

18. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

19. 다음 중 명제 「$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$　② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$　④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

20. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

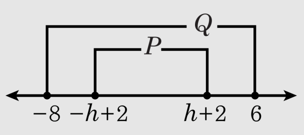
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

21. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

22. 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $\sim q \to \sim p$ ② $p \to r$ ③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim p$ ⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

① 명제 $p \to q$ 참이므로 대우인 $\sim q \to \sim p$도 참
②, ③ 명제 $\sim r \to \sim q$ 참이므로 대우인 ③ $q \to r$도 참이고,$p \to q$와 $q \to r$로부터 ② $p \to r$도 참이다.
④ $p \to r$이 참이므로 대우인$\sim r \to \sim p$ 도 참이다.
⑤ 명제$p \to r$이 참이라고 해도 이인$\sim p \to \sim r$은 반드시 참이라고는 할 수 없다.

23. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

24. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 인 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $abc \le 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$ 이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$ 이고 $c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

25. $x>0,\ y>0$ 일 때, $4x+y+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x>0,\ y>0$ 일 때 $4x+y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$4x+y+\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}}=4$$

$\therefore\ 4x+y+\dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4