1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

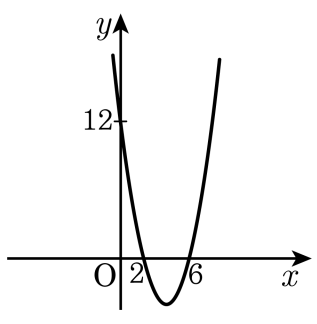
이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 다음은 이차함수 $y = (x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6) = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 A$(2,\ 0)$, B$(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{AB} = 4$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

4. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7 (-3 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

5. $-2 \le x \le 2$ 일 때, $\frac{20}{3-x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$-2 \le x \le 2$ 에서

$-2 \le -x \le 2$,

$1 \le 3-x \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3-x} \le 1$

$\therefore 4 \le \frac{20}{3-x} \le 20$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

6. 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$　② $-1<x<3$

③ $1<x<3$　④ $x<-1$ 또는 $x>3$

⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$

7. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x-4)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

8. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ 2x^2-3x+1>0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x>2$

해설

부등식 $2x-4>0$ 에서

$x>2 \cdots\cdots$ ①

부등식 $2x^2-3x+1>0$ 에서

$(2x-1)(x-1)>0$

$\therefore x>1$ 또는 $x<\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ②

따라서, 구하는 해는 ①과 ②를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore\ x>2$

9. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5	1	−6	11	−30
		5	−5	30
	1	−1	6	0

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

10. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

11. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$　② $a = 1$

③ $a = \pm 1$　④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

12. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=9 \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $y=3$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $x+2y+3z=11 \cdots\cdots ㉣$
㉣ − ㉠에서 $3z=3 \therefore z=1$
㉣ − ㉡에서 $x=2$
㉣ − ㉢ 에서 $y=3$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2}$

15. 부등식 $x^2 + x + m \geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 + x + m \geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2 + x + m = 0$의 판별식을 D라 할 때

$D = 1^2 - 4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$

따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

16. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $2<x<3$일 때, $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$2<x<3$ 가 해이므로

$(x-2)(x-3)<0$

$x^2-5x+6<0,\ a=-5, b=6$

$\therefore\ a+b=1$

17. 직선 $y = mx + 1$ 은 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나고, $y = x^2 + 2x + 2$ 와는 만나지 않는다. 이 때, m 의 범위를 구하면?

① $m < 3$ 또는 $m > 4$ ② $0 < m < 3, 3 < m < 4$

③ $3 < m < 4$ ④ $0 < m < 4$

⑤ $m \neq 3, m > 4$

해설

$mx + 1 = y$ 와 $y = x^2 + 2x + 2$ 는
서로 만나지 않으므로 $mx + 1 = x^2 + 2x + 2$
$x^2 - (m-2)x + 1 = 0$
$D < 0 : (m-2)^2 - 4 < 0$
$0 < m < 4$
$y = mx + 1$ 과 $y = x^2 + 3x + 1$ 은
서로 다른 두점에서 만난다.
$x^2 + (3-m)x = 0$ 이고 $D = (3-m)^2$ 이므로
$m = 3$ 에서 $D = 0$ 이 되어서
한점에서 중근을 가지므로 $m \neq 3$
$\therefore\ 0 < m < 3,\ \ 3 < m < 4$

18. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

19. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 4x-2y+z=4 \\ 3x-5y-2z=5 \end{cases}$ 을 풀 때,

xyz의 값을 구하면?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{cases} x+y+z=1 \cdots ① \\ 4x-2y+z=4 \cdots ② \\ 3x-5y-2z=5 \cdots ③ \end{cases}$$

① $-$ ② : $-3x+3y=-3 \quad \therefore -x+y=-1$

$2\times$ ② $+$ ③ : $11x-9y=13$

위의 두 식을 연립하여 풀어주면, $x=2,\ y=1$

$\therefore\ z=1-x-y=1-2-1=-2$

$\therefore\ xyz=2\times 1\times(-2)=-4$

20. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ -3x+y-z=a \\ x+y+bz=2 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$\begin{cases} 2x-y+2z=1 & \cdots ㉠ \\ -3x+y-z=a & \cdots ㉡ \\ x+y+bz=2 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡하면

$-x+z=1+a \cdots ㉣$

㉠ + ㉢ 하면

$3x+(2+b)z=3 \cdots ㉤$

㉣, ㉤를 연립하여 풀면 해가 무수히 많으므로

$-\frac{1}{3}=\frac{1}{2+b}=\frac{1+a}{3}$

$\therefore 2+b=-3 \quad \therefore b=-5$

$1+a=-1 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a+b=-7$

21. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20 %증가하였고, B제품은 25 %증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40개

해설

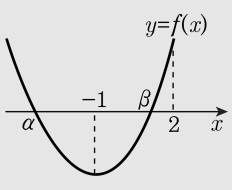
작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

22. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$ ② $-2<a<1$ ③ $0<a<2$
④ $1<a<2$ ⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$
$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$
$\therefore a<-3$, $a>-1$

(i), (ii)에서 $0<a<2$

23. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

24. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots ㉠$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$

$-y^2 + 6y - 9 \geq 0,\ y^2 - 6y + 9 \leq 0$

$(y-3)^2 \leq 0$ y 가 실수이므로 $y - 3 = 0$

$\therefore y = 3 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0,\ (x+1)^2 = 0$

$\therefore\ x = -1$

$\therefore\ x + y = -1 + 3 = 2$

25. 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$
x, y가 정수이므로
$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$
$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$
$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$