

1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

- ① 예쁜 여학생들의 모임
- ② 큰 수의 모임
- ③ 우리 반에서 안경을 낀 학생들의 모임
- ④ 12의 약수들의 모임
- ⑤ 노래를 잘 부르는 학생들의 모임

해설

예쁘다거나, 크다거나, 노래를 잘 부른다는 조건만으로는 대상을 분명히 알 수가 없다.

2. 다음 벤 다이어그램을 보고, 집합 A 의 원소를 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 봄

▷ 정답: 여름

▷ 정답: 가을

▷ 정답: 겨울

해설

집합 A 의 원소는 '봄, 여름, 가을, 겨울'이다.

3. 다음 보기 중 유한집합은 모두 몇 개인가?

보기

- ㉠ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$
- ㉡ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 수}\}$
- ㉢ $\{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 큰 홀수}\}$
- ㉣ $\{x \mid x \text{는 무지개의 색깔}\}$
- ㉤ $\{x \mid x \text{는 우리나라의 놀이 동산}\}$
- ㉥ $\{x \mid x \text{는 우리나라 사람 중에서 '차' 씨 인 사람}\}$

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

유한집합은 ㉠, ㉢, ㉣, ㉤의 모두 4개이다.

4. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $10 \in A$

② $9 \notin A$

③ $A \subset B$

④ $\{3\} \subset B$

⑤ $B \not\subset A$

해설

① $10 \notin A$

② $9 \in A$

③ $A \not\subset B$

⑤ $B \subset A$

5. 다음 집합 중에서 집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 골라라.

<input type="checkbox"/> $\{a\}$	<input type="checkbox"/> $\{b, d\}$
<input type="checkbox"/> $\{a, b, c\}$	<input type="checkbox"/> \emptyset

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답:

▶ 정답:

▶ 정답:

해설

집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 구하면 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ 이다.

6. 두 집합 C, D 에 대하여 $n(C) = 12, n(D) = 8, n(C \cap D) = 4$ 일 때, $n(C \cup D)$ 는?

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$$\begin{aligned}n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 12 + 8 - 4 = 16\end{aligned}$$

8. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.

② $x + y = 10$ 이다.

③ $|-3| = -3$

④ $x = 2$ 일 때, $x - 1 > 0$

⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참
따라서 명제는 ①, ③, ④

9. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답:

▶ 정답: 일대일대응



10. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$
모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로
 $g(x)$ 는 상수함수이다.
즉, $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

11. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 16 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이므로
 $n(A) = 5$

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B 에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

$A \cap B^c = A - B = A$ 이므로 A, B 는 서로소
 $n(A \cap B) = 0$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$

13. 두 집합 $A = \{4, 5, a-1\}$, $B = \{b-3, 6, 8\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$A \cap B = \{4, 6\}$ 이므로 $\{4, 6\} \subset \{4, 5, a-1\}$, $\{4, 6\} \subset \{b-3, 6, 8\}$ 이다.

그러면 $a-1=6, b-3=4$ 가 되어 $a=7, b=7$ 이다.

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{7}{7} = 1$ 이다.

15. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 $A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, c\}$ 일 때, A^c , $A - B$ 는?

① $A^c = \{b\}$, $A - B = \{a\}$

② $A^c = \{c\}$, $A - B = \{d\}$

③ $A^c = \{b, e\}$, $A - B = \{a, d\}$

④ $A^c = \{b, c\}$, $A - B = \{a, e\}$

⑤ $A^c = \{c, d\}$, $A - B = \{a, e\}$

해설

$U = \{a, b, c, d, e\}$ 이므로 $A^c = \{b, c\}$ 이고 $A - B = \{a, d\}$ 이다.
따라서 ③이다.

16. 두 집합 $A = \{2, 3, a^2\}$, $B = \{2a+3, -a+3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1\}$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$A \cap B = \{1\}$ 에서 $1 \in A$ 이므로 $a^2 = 1 \therefore a = 1$ 또는 $a = -1$
(i) $a = 1$ 일 때, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{2\}$ 이다.
(ii) $a = -1$ 일 때, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.
 $\therefore a = -1$

17. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z 는 모두 실수)

- ① $p: a < b, \quad q: |a| < |b|$
- ② $p: 2x + 3 = 5, \quad q: x^2 - 2x + 1 = 0$
- ③ $p: a > 3, \quad q: a^2 > 9$
- ④ $p: x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q: x + y > 0$
- ⑤ $p: xy = yz, \quad q: x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

- ① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
- ② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.
- ③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

18. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned}x-4=0 &\Rightarrow x^2+ax-48=0 \\ \therefore 16+4a-48 &= 0 \\ \therefore a &= 8\end{aligned}$$

19. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\text{㉠}) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\text{㉡}), \text{ 즉 } (\text{㉢}) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|a|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
 ② $|a|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
 ③ $|a|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
 ④ $|a|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
 ⑤ $|a|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} &: |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} &: \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} &: |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

20. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x - y + 4z)^2$
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

21. 두 집합 $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \rightarrow x$	㉡ $g : x \rightarrow x+2$
㉢ $h : x \rightarrow x $	㉣ $k : x \rightarrow x^2 - 1$

- ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉢, ㉣
 ④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.
 ㉡ $g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.
 ㉢ $h(x) = |x|$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.
 ㉣ $k(x) = x^2 - 1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

22. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 0, f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

23. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

24. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset B$ 이다. 다음 중 $A \subset C$ 가 되는 경우가 아닌 것은?

- ① $A = \emptyset, C = \emptyset$
- ② $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
- ③ $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 큰 짝수}\}, C = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$

해설

$A \subset B$ 이므로, $B \subset C$ 일 때, $A \subset C$ 의 포함 관계가 성립한다.

- ① $A = \emptyset, C = \emptyset$ 이므로 $A \subset C$
- ② $B = \{1, 2, 3, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $B \subset C$
- ③ $B = \{12, 14, 16, \dots\}, C = \{2, 4, 6, \dots\}$ 이므로 $B \not\subset C$
- ④ $A = \{12, 24, \dots\}, C = \{6, 12, 18, \dots\}$ 이므로 $A \subset C$
- ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A \subset B, A \not\subset C$

25. 지우네 반 학생 30 명 중 게임기를 가진 학생은 21 명, 휴대전화기를 가진 학생은 19 명, 둘 다 가지고 있는 학생은 11 명이다. 이 때, 휴대전화기만 가지고 있는 학생 수는?

① 8명 ② 11명 ③ 19명 ④ 21명 ⑤ 30명

해설

지우네 반 학생의 집합을 U , 게임기를 가진 학생의 집합을 A , 휴대전화기를 가진 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 30$, $n(A) = 21$, $n(B) = 19$, $n(A \cap B) = 11$ 이다.
휴대전화기만 가진 학생의 집합은 $B - A$ 이므로
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 19 - 11 = 8$ 이다.

26. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p: x$ 는 48의 약수, $q: 0 < x < 30$, $r: x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ' p 이고 q 이고 $\sim r$ '를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

- ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
 $P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
 $Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 28\}$
 $R = \{4, 6\}$
' p 이고 q 이고 $\sim r$ '를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
 $P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

27. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 p : x 는 18의 약수, q : x 는 12의 약수」

- ① {1, 2, 3, 6} ② {6, 12, 9, 8} ③ {9, 18}
- ④ {12, 18} ⑤ {6, 9, 18}

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

28. m, n 이 실수일 때, 명제 ' $m^2 + n^2 = 0$ 이면 $m = 0$ 이고 $n = 0$ 이다.'의 역, 이, 대우 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

- ① 역 ② 이 ③ 대우
④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

역 : $m = 0$ 이고 $n = 0$ 이면 $m^2 + n^2 = 0$ 이다. (참)
이 : $m^2 + n^2 \neq 0$ 이면 $m \neq 0$ 또는 $n \neq 0$ 이다. (참)
대우 : $m \neq 0$ 또는 $n \neq 0$ 이면 $m^2 + n^2 \neq 0$ 이다. (참)
※ 주어진 명제와 그 역이 참이면 이와 대우도 참이다.

29. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4\end{aligned}$$

30. 실수로 이루어진 집합 B 가 다음의 두 조건을 만족할 때, 다음 설명 중 옳은 것은? (단, $n(B)$ 는 집합 B 의 원소의 개수를 나타낸다.)

㉠ $n(B) = 1$

㉡ $x \in B$ 이면 $\frac{1}{x} \in B$

① 집합 B 는 \emptyset 뿐이다.

② 집합 B 는 두 개 있다.

③ $\{-1, 1\} \subset B$

④ $B = \{0\}$

⑤ $B \not\subset \{-1, 0, 1\}$

해설

집합 B 의 원소의 개수가 1개이므로 집합 B 는 원소가 하나뿐인 유한집합이다.

또, $x \in B$ 이면 $\frac{1}{x} \in B$ 에서

$x = \frac{1}{x}, x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$ 따라서 $B = \{1\}$ 또는 $\{-1\}$ 이므로 집합 B 는 두 개 있다.

31. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

- ① 4개 ② 8개 ③ 12개 ④ 24개 ⑤ 32개

해설

'적어도~' 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합

수 $\Rightarrow \{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개

$\therefore 32 - 8 = 24(\text{개})$

32. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(A \cup B) \supset A$

② $A - B = A \cap B^c$

③ $\emptyset^c = U$

④ $A - B = B - A$

⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

해설

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 이면

$A - B = \{1\}, B - A = \{3\}$

$\therefore A - B \neq B - A$

33. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.’ 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마) 에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.’ 이다. 3 의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2 이므로
 $n = (가) 또는 n = (나)$ (단, k 는 음이 아닌 정수) 로 가정할 수 있다.
 (i) $n = (가)$ 일 때
 $n^2 = 3(다) + 1$
 (ii) $n = (나)$ 일 때
 $n^2 = 3(라) + 1$
 이 되어 n^2 은 3 으로 나누면 나머지가 (마) 인 자연수가 된다.
 (i), (ii) 에 의하여 n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

- ① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
 ② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
 ③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
 ④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
 ⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나뉘서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
 제곱을 하여 계산하면 (다), (라) 는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.
 따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.