1. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} x+y=1\cdots㉠ \\ y+z=3\cdots㉡ \\ z+x=4\cdots㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ $\Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4\cdots$㉣

㉣ − ㉠ $\Rightarrow z=3$

㉣ − ㉡ $\Rightarrow x=1$

㉣ − ㉢ $\Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

2. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는
$m \geq -2$
$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로
$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$
따라서 $-2 \leq m < 2$이므로
만족하는 정수 m의 개수는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

3. 점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 두 점 B, C 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 3$ ② $y = 2x - 5$ ③ $y = x - 1$
④ $y = x - 3$ ⑤ $y = x - 5$

해설

점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 B 의 좌표는 $(2, -3)$ 이고,
점 A $(-2, 3)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점 C 의 좌표는 $(3, -2)$ 이다.
따라서, 두 점 B $(2, -3)$, C $(3, -2)$ 를 지나는
직선의 방정식은
$y + 3 = \frac{-2 + 3}{3 - 2}(x - 2)$, $y + 3 = x - 2$
$\therefore y = x - 5$

4. 두 집합 A, B가 $n(A) = 17$, $n(A \cap B) = 6$, $n(A \cup B) = 29$일 때, 집합 B의 원소의 개수를 구하여라.

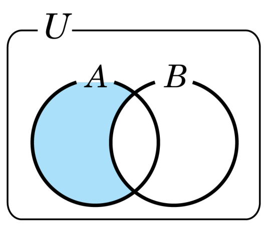
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 18 개

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$17 + n(B) - 6 = 29$
$n(B) = 29 - 17 + 6 = 18$ 이다.
따라서 $n(B) = 18$ 이다.

5. $n(U)=20, n(B-A)=6, n(B)=8, n(A^c)=6$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$n(B)=8, n(B-A)=6$ 이므로 $n(A\cap B)=2$ 이다.
$n(A^c)=6$ 이므로 $n(A)=n(U)-n(A^c)=20-6=14$ 이다.
따라서 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=14-2=12$ 이다.

6. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

7. 두 집합 $A = \{2,\ 5,\ 9,\ a\}$, $B = \{3,\ 7,\ b+2,\ b-2\}$에 대하여 $A - B = \{2,\ 8\}$일 때, $a - b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 A에서 $a = 8$이고,
$A \cap B = \{5,\ 9\}$이므로
(i) $b + 2 = 5$ 일 때, $b = 3$이므로
$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \Rightarrow A \cap B = \{5\}$ (×)
(ii) $b - 2 = 5$일 때, $b = 7$이므로
$B = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\} \Rightarrow A \cap B = \{5,\ 9\}$ (○)
$\therefore\ a - b = 8 - 7 = 1$

8. 점 $P(1,\ 2)$ 는 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ $(a \neq 0)$ 의 그래프 위에 있고, 또 그 역함수의 그래프 위에도 있다고 한다. ab 의 값은 ?

① 20　② -20　③ -21　④ 21　⑤ 24

해설

점 $P(1,\ 2)$ 가 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프 위에 있으므로 $\sqrt{a+b} = 2$
$\therefore a+b = 4 \cdots$ ㉠
점 $P(1,\ 2)$ 가 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 그래프 위에 있으므로
점 $(2, 1)$ 이 $y = \sqrt{ax+b}$ 위에 있다.
즉, $\sqrt{2a+b} = 1$
$\therefore 2a+b = 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a = -3,\ b = 7$
$\therefore ab = -21$

9. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a + 9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \dfrac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a+19d) = 400$

$2a + 19d = 40$

$2a + 9d + 10d = 40$

$20 + 10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

10. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41 \times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

11. $x-\dfrac{1}{x}=1$일 때, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{5}$　② $\pm 5\sqrt{5}$　③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$에서

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3$에서

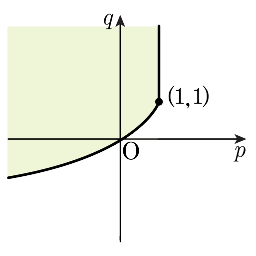
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=5$

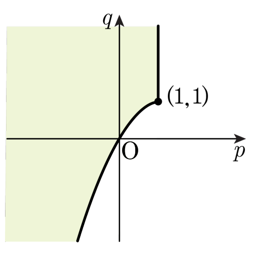
$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

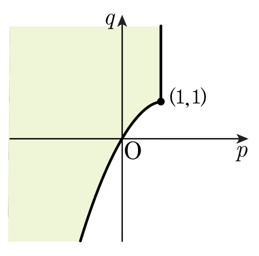
$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=\pm 5\sqrt{5}-3(\pm\sqrt{5})=\pm 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

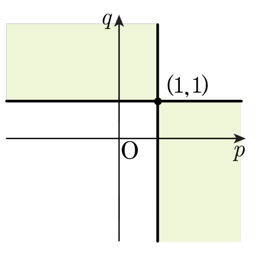
$\therefore\ x^5+\dfrac{1}{x^5}=3(\pm 2\sqrt{5})-(\pm\sqrt{5})=\pm 5\sqrt{5}$

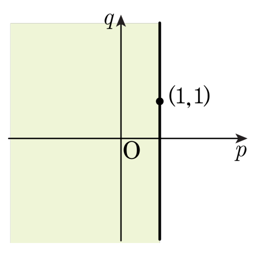
12. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x, y) \mid x = 1$이고$y \geq 1\}$과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p, q)가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)

①


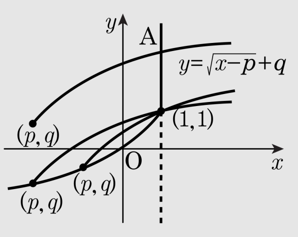
②


③


④


⑤


해설



무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프는 점 (p, q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$ 가 반드시 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p, q)가 직선 $x = 1$의 왼쪽에 놓여야 한다.
$\therefore\ p \leq 1 \cdots$ ㉠
또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 점 $(1, 1)$을 지날 때이다.
점 $(1, 1)$을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p}+q$에서 $q = 1-\sqrt{1-p}$
$\therefore\ q \geq 1-\sqrt{1-p} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

13. 수열 $3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ 65,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $20^{20}+19$ ② $20^{20}+39$ ③ $20^{21}+11$

④ $20^{21}+18$ ⑤ $20^{21}+29$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}: 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \ 65,\ \ \cdots$

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n + 1$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{20}(2^k+1) = \dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1} + 20$

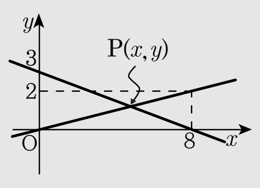
$= 2^{21} + 18$

14. 한 어린이가 길의 양쪽 모두에 가로등이 있는 길을 걷고 있던 중 그림자의 끝이 각각 가로등의 밑 부분과 일치하였다. 가로등의 길이는 각각 3 m, 2 m 이고, 두 가로등 사이의 거리는 8 m 일 때이 어린이의 키는 몇 m 인가 구하면? (단, 두 가로등과 어린이는 일직선 위에 있다.)

① 1.5 m ② 1.4 m ③ 1.3 m ④ 1.2 m ⑤ 1.1 m

해설

두 직선의 교점은 두 직선의 방정식을 연립하여 구한다.
어린이의 키를 나타내는 값은 그림과 같이



$y=\frac{1}{4}x$와 $y=-\frac{3}{8}x+3$의 교점이 P의 y좌표이므로
두 식을 연립하여 풀면 $x=4.8$, $y=1.2$
따라서, 어린이의 키는 1.2 m 이다.

15. $\{(x,\ y) \mid y = \sqrt{x-3}\} \cap \{(x,\ y) \mid y = mx+1\} \neq \varnothing$인 m의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{5}$　④ $-\frac{1}{6}$　⑤ $-\frac{1}{9}$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ ········· ①은

$y = \sqrt{x}$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y = mx+1$ ········· ②의 y절편은 항상 1이다.

②식이 $(3,\ 0)$을 지날 때, $m = -\frac{1}{3} \cdots$ ㉠

②식이 ① 식에 접할 때,

$\sqrt{x-3} = mx+1$에서 양변 제곱하여 정리하면

$m^2x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$

$D = 0$에서 $m = \frac{1}{6},\ -\frac{1}{2}$

$m > 0$이므로 $m = \frac{1}{6} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터

$-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{6}$　$\therefore\ a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b = -\frac{1}{6}$