

1. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$ 와 $4x^3 - 4$ 에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?

- ① 두 다항식은 $(x - 1)$ 로 나누어 떨어지므로, $(x - 1)$ 은 두 다항식의 공약수이다.
- ② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
- ③ $4(x - 1)^3(x + 2)^2(x^2 + x + 1)$ 은 두 다항식의 공배수이다.
- ④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x - 1)$ 이다.
- ⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x + 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ 이다.

해설

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$$

$$4x^3 - 4 = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{최대공약수 : } 2(x - 1)$$

$$\text{최소공배수 : } 4(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$$

2. 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\{a, b, c\} \subset A$

② $\{b, c\} \subset A$

③ $\{a, c\} \in A$

④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$

⑤ $\emptyset \subset A$

해설

① $\{a\{b, c\}\} \subset A$

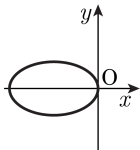
② $\{b, c\} \in A$

③ $\{a, c\} \subset A$

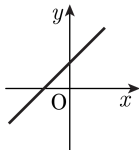
④ $\{\{b, c\}c\} \subset A$

3. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

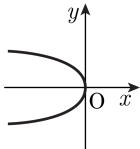
①



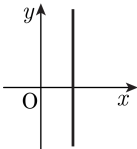
②



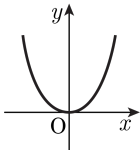
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. $\Rightarrow$ ②

4. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

5. 다음 ()안에 알맞은 것은?

$$1 - 2i, 2 - 4i, 3 - 8i, 4 - 16i, (\quad), \dots$$

① $5 - 18i$

② $5 - 20i$

③ $5 - 24i$

④ $5 - 32i$

⑤ $5 - 64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i, a_4 + b_4i, \dots$ 와 같이 생각한다면
(단, a_k, b_k 는 실수)

수열 $\{a_n\}$ 의 배열은 1, 2, 3, 4, (), $\dots$ 이고

수열 $\{b_n\}$ 의 배열은 -2, -4, -8, -16, (), $\dots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5 - 32i$ 이다.

6. 어느 반 학생 35명 중 피자를 좋아하는 학생이 19명, 떡볶이를 좋아하는 학생이 21명, 피자과 떡볶이 모두를 싫어하는 학생이 3명일 때, 둘 다 좋아하는 학생은 몇 명인가?

▶ 답: 명

▶ 정답 : 8 명

해설

전체 반 학생들의 집합을 U , 피자를 좋아하는 학생들의 집합을 A , 떡볶이를 좋아하는 학생들의 집합을 B 라고 하면,

$$n(U) = 35, n(A) = 19, n(B) = 21$$

$$n((A \cup B)^c) = 3$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 35 - 3 = 32$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 19 + 21 - 32 = 8$$

7. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. 명제 ' p 이면 $\sim q$ 이다.'가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $P - Q = P$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $P \cup Q^c = U$

해설

$p \Rightarrow \sim q$ 이면 $P \subset Q^c$ 인 진리집합의 관계가 성립한다. 즉,
 $P \cap Q^c = P \Leftrightarrow P - Q = P$

8. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4}$$

① $\frac{8x^4}{1-x^4}$

② $\frac{8}{1-x^4}$

③ $\frac{8x^4}{1-x^8}$

④ $\frac{8}{1-x^8}$

⑤ $\frac{8x^4}{1+x^8}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{4}{1-x^4} - \frac{4}{1+x^4} = \frac{8x^4}{1-x^8} \end{aligned}$$

9. $\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4 \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4 \sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $P = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

10. $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

④ $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

① $a = 3, b = -2$

② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$

③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$

④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$

⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -a \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = b \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$

이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$$

$$\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$$

$$\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

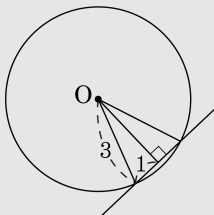
$$\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$$

12. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m = \pm 4$$

$$\therefore m^2 = 16$$

13. 두 점 $A(-2, 2)$, $B(3, 4)$ 가 있다. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 임의의 두 점을 P , Q 라 할 때, $\overline{AP}$ 의 최댓값과 $\overline{BQ}$ 의 최솟값의 합은 ?

① 3

② $2 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 2\sqrt{2}$

④ $4 + 2\sqrt{2}$

⑤ 7

해설

그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{AP}$ 는 최대가되고 $\overline{BQ}$ 는 최소가 된다.

$\therefore \overline{AP} = \text{반지름의 길이} + \text{원의 중심과 } A \text{ 까지의 거리}$

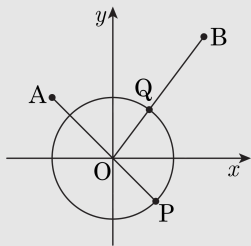
$$= 2 + \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$\overline{BQ} = \text{원의 중심과 } B \text{ 까지의 거리} - \text{반지름의 길이}$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} - 2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \text{구하는 답은 } (2 + 2\sqrt{2}) + 3 = 5 + 2\sqrt{2}$$



14. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + (a + 5)x - a = 0$ 의 세 근 중 두 근은 서로 다르고 역수 관계가 성립한다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + (a + 5)x - a \text{ 라면}$$

$$f(1) = 2 - 7 + a + 5 - a = 0 \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어진다.

$$\therefore (x - 1)(2x^2 - 5x + a) = 0$$

따라서, $2x^2 - 5x + a = 0$ 에서 두 근을 α, β 라 하면,

α, β 는 서로 다르고 서로 역수의 관계에 있으므로 $\alpha\beta = 1$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{a}{2} = 1 \text{ 에서 } a = 2$$

15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이고, $A \cap B = \{3\}$, $(A \cup B^c) - (A^c \cup B) = \{1, 4, 5, 6\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) - (A^c \cup B) &= (A \cup B^c) \cap (A \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \\ &= \{1, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

따라서, $A \cap B = \{3\}$ 이므로

$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ 이고, $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이므로 $B = \{2, 3, 7\}$

$$n(A) + n(B) = 5 + 3 = 8$$