1. 집합 $\{a, b, c, e\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 16 개

해설

$2^4 = 16$ (개)

2. 다음 중 옳은 것은?

보기

㉠ $n(\varnothing) = 0$

㉡ $A \subset B$ 이면, $n(A) \le n(B)$ 이다.

㉢ $n(\{x \mid x$는 1 이상 4 이하의 짝수$\}) = 2$

㉣ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

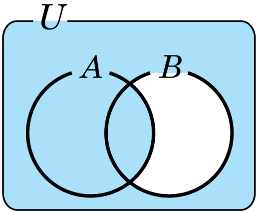
㉤ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{e\}) = 3$

① ㉡, ㉢, ㉤
② ㉠, ㉢, ㉣
③ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

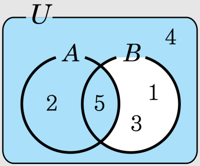
㉣ 반례 : $A = \{2\},\ B = \{1,\ 3\}$

3. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5\}, B = \{1, 3, 5\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



① $\{2, 4\}$　② $\{4, 5\}$　③ $\{2, 4, 5\}$　④ $\{1, 2, 3, 4\}$　⑤ $\{1, 2, 4, 5\}$

해설



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{2, 4, 5\}$ 이다.

4. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에서 집합 $(A \cup B) \cap (A - B)^c$ 을 간단히 한 것은?

① $\varnothing$　　② A　　③ B　　④ U　　⑤ $A \cap B$

해설

$$(A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) = B$$

5. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$　　② $x = 12$　　③ $x = 10$

④ $x = 8$　　⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

6. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항

④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$

$$\therefore\ n > \frac{28}{3} = 9.33\cdots$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{9} a_{k-1}$ 의 값은?

① 26　　② 27　　③ 28　　④ 29　　⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

8. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 $A=\{x \mid x$는 2의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $C=\{x \mid x$는 3의 배수$\}$에 대하여 연산 ◎를 $A◎B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$로 정의할 때, $n((A◎B)◎(A◎C))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 14,\ 15\}$

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\ ,\ 10,\ 12,\ 14\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$C=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

$A◎B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$\qquad\quad=(A-B)\cup(B-A)$이므로

$A◎B=\{8,\ 10,\ 14\}\cup\{1,\ 3\}$

$A◎C=\{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14\}\cup\{3,\ 9,\ 15\}$

$\therefore (A◎B)◎(A◎C)$

$=\{1,\ 3,\ 8,\ 10,\ 14\}◎\{2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15\}$

$=\{1\}\cup\{2,\ 4,\ 9,\ 15\}$

$\therefore n((A◎B)◎(A◎C))=5$

9. $x,\ y,\ z$ 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

② $x,\ y,\ z$ 는 서로 다르다.

③ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$

⑤ $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$
즉, $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

10. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q라 하자. $P = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$, $Q = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$ 일 때, $p \to \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 7

해설

$p \to \sim q$ 의 반례는$P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.
즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$
$\therefore P \cap Q = \{6\}$

11. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이 <u>아닌</u> 것은? (단 a, b, c 는 실수)

① $p : a = b,\ q : ac = bc$

② $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$또는$b = 0$

③ p : △ABC 는 이등변삼각형, $q : \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

④ $p : a = 1,\ q : a^2 - 3a + 2 = 0$

⑤ $p : 0 < a < b,\ q : a^2 < b^2$

해설

① $q\ :\ ac = bc\ \rightarrow\ a = b$ 또는 $c = 0$ (참)
② $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$(참)
③ $\angle\mathrm{B} \neq \angle\mathrm{C} \rightarrow$ △ABC는 이등변 삼각형이 아니다. (거짓)
반례 : $\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{A}$ 인 이등변 삼각형
④ $q\ :\ a = 1,\ 2$ (참)
⑤ $(0 < a < b) \subset (a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < a < b$ 또는 $b < a < 0)$

12. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$ ② $P \cap Q = Q$ ③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \to \sim q$이고, 대우 $q \to p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

13. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(3y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

14. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

① 공차가 2인 경우 (4가지)

$2,\ 4,\ 6 \quad 4,\ 6,\ 8 \quad 6,\ 8,\ 10 \quad 8,\ 10,\ 12$

② 공차가 4인 경우 (2가지)

$2,\ 6,\ 10 \quad 4,\ 8,\ 12$

15. x에 대한 이차다항식 $f(x)=a^2(x-1)^2+3a(x+1)+2$를 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나눈 나머지들이 이 순서대로 등차수열이 될 때, 상수 a의 값은?

① -3　　② -1　　③ 2　　④ 5　　⑤ 7

해설

$f(1)=6a+2$

$f(-1)=4a^2+2$

$f(-2)=9a^2-3a+2$

$$4a^2+2=\frac{(6a+2)+(9a^2-3a+2)}{2}$$

$8a^2+4=9a^2+3a+4$

$a^2+3a=0$

$a=0,\ -3$

그런데 $f(x)$는 이차식이므로 $a\neq 0$

$\therefore\ a=-3$

16. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 $a_3+a_6+a_9=9$, $a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$ 일 때, $a_k=15$를 만족하는 k의 값은?

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_6+a_9=9$에서

$(a+2d)+(a+5d)+(a+8d)=9$

$3a+15d=9 \quad \therefore\ a+5d=3 \cdots$ ㉠

$a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$에서

$$\frac{9\left\{(a+5d)+(a+13d)\right\}}{2}=99$$

$\therefore\ a+9d=11 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=2,\ a=-7$

$\therefore\ a_n=-7+(n-1)\cdot 2=2n-9$

따라서 $a_k=2k-9=15$에서

$2k=24 \quad \therefore\ k=12$

17. 등차수열 $\{a_n\}$의 제 9항이 -8이고, 첫째항부터 제 8항까지의 합이 44일 때, 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는가?

① 제5항 ② 제6항 ③ 제7항

④ 제8항 ⑤ 제9항

해설

$a_9 = a + 8d = -8$

$$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 44$$

$$\begin{cases} 2a + 7d = 11 \\ 2a + 16d = -16 \end{cases}$$

$9d = -27$

$d = -3$

$a = 16$

$a_n = 16 + (n-1) \cdot (-3)$

$= -3n + 19 < 0$

$19 < 3n$

$\frac{19}{3} < n$

$\therefore$ 여섯번째 항까지의 합이 최대

18. 2와 162사이에 세 양수 a, b, c를 넣어 $2, a, b, c, 162$가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$b^2 = 2 \times 162$

$b = 18 \quad (\because b > 0)$

$2, a, 18, c, 162$가 등비수열을 이루므로

$a^2 = 2 \times 18$

$a = 6 \quad (\because a > 0)$

$c^2 = 18 \times 162$

$c = 54$

$\therefore a + b = c = 6 + 18 + 54 = 78$

19. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56$이므로

$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$

$\therefore n = 6$

20. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

ㄴ $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)$

ㄷ $1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k}$(거짓)

ㄴ. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$(거짓)

ㄷ. 주어진 수열의 일반항은 $n\cdot 2^{n-1}$ 이므로
$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$(참)

21. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$

④ 2^{n-1}　⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$$

23. $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ 5 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$x + x^{-1} = 3$ 이므로

$(x + x^{-1})^3 = 27$

$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$

$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$

$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$

$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5}$ $(\because\ x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$

24. $\sqrt[3]{a} = 81$, $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 225

해설

$\sqrt[3]{a} = 81 = 3^4$에서 $a = 3^{12}$

$\sqrt{\sqrt{b}} = 125$, $\sqrt[4]{b} = 5^3$ $\therefore b = 5^{12}$

이때, $ab = 3^{12} \cdot 5^{12} = 15^{12}$

$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{15^{12}}$

$= 15^{\frac{12}{6}} = 15^2 = 225$

25. $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$일 때, $\log_{36} 42$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{1+a+ab}{1+a}$ ② $\dfrac{1+a+2ab}{1+a}$ ③ $\dfrac{1+2a+ab}{2+a}$

④ $\dfrac{1+a+ab}{2(1+a)}$ ⑤ $\dfrac{2+a+2ab}{2(1+a)}$

해설

로그의 밑을 3으로 통일시키면

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a},\quad \log_3 7 = b$$

$$\log_{36} 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 36} = \frac{\log_3(2\times3\times7)}{\log_3(2^2\times3^2)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{2\log_3 2 + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{a}+1+b}{2\cdot\frac{1}{a}+2} = \frac{1+a+ab}{2(1+a)}$$

26. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$이므로

$$\log \sqrt[3]{0.138} = \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1})$$ 따 라 서

$$= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1)$$

$$= -0.2867 = -1 + 0.7133$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$의 소수 부분은 0.7133이다.

27. 두 양수 A, $\frac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1)+(1-\alpha)$

따라서 $\log \frac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha+\beta = \alpha+(1-\alpha) = 1$

28. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$ 로 치환하면, $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$$\therefore\ 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1-0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

29. 집합 $A = \{0,\ 2,\ \{4\},\ \{6,\ 8\},\ \varnothing\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?.

① $\varnothing \in A$

② $\{0,\ 2,\ \{4\}\} \subset A$

③ $n(A) = 5$

④ $\{4\} \subset A$

⑤ $\{6,\ 8\} \in A$

해설

④ $\{4\} \in A$

30. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A=\{2,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$
㉡ $A \subset B$, $B \subset A$
㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$4 \in B$ 이므로 $4 \in A$

$a=4$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{2,\ 4,\ 16\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

$\therefore\ b=2,\ c=16$ 또는 $b=16,\ c=2$

(ii) $a^2=4$ 일 때, $a=2$ (a 는 자연수)

$A=\{2,\ 2^2\}=\{2,\ 4\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=4+2+16=22$

31. $U = \{x|0 \le x < 15,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x$는 12 이하의 2의 배수$\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로

$n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$

$= n((A - B) \cup (B - A))$

$= n(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}) = 10$ 이다.

32. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n+1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{12}의 값은?

① $\dfrac{2}{41}$ ② $\dfrac{1}{21}$ ③ $\dfrac{2}{43}$ ④ $\dfrac{1}{22}$ ⑤ $\dfrac{2}{45}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n+1}$의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{a_n} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$으로 놓으면 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{2}$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot 2 = \frac{4n-3}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{4n-3}$$

$$\therefore a_2 = \frac{2}{4\cdot 12-3} = \frac{2}{45}$$

33. 어떤 박테리아의 개체 수는 매 시간 $r\%$ 씩 일정하게 증가하여 n 시간 후에는 처음의 $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ 배가 된다고 한다. 이 박테리아의 개체 수가 매 시간 16% 씩 일정하게 증가할 때, 20 시간 후에는 처음의 몇 배가 되는지 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

① 15.5 배 ② 16.5 배 ③ 17.5 배

④ 18.5 배 ⑤ 19.5 배

해설

처음 박테리아의 수를 A 라 하고 매 시간 16% 씩 증가하여 20 시간이 지난 후 박테리아의 수가 처음의 k 배라 하면

$$A\left(1+\frac{16}{100}\right)^{20} = kA \quad \therefore\ k = 1.16^{20}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log k = 20\log 1.16 = 20 \times 0.0645$$
$$= 1.2900 = \log 19.5$$
$$\therefore\ k = 19.5$$