

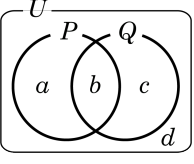
1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를
바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $C < A < B$
- ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로
 A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
 $A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
 $B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
 $C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ a 와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$ 이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

3. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① $x = y$
- ② $xy > 0$
- ③ $xy \geq 0$
- ④ $x \geq 0, y \geq 0$
- ⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
 $xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$
(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
 $xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
 $xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

4. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

5. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$
 $\therefore M = 6, m = -6$

6. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 ‘ $f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$ ’의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

- ① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$
- ④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.
 $\sim [f(x) \neq 0 \text{이고}(g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0)]$
 $\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ 또는 } \sim [g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0]$
 $\Leftrightarrow f(x) \text{ 또는 } [g(x) \neq 0 \text{이고 } h(x) \neq 0]$
 $\Leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$
 $\Leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

7. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?
- ① $\emptyset$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{3, 4, 5\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
 $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
 $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
 $x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

8. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

9. 전체집합 $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 6, 8\}, B^C \cap A = \{8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 4 개

해설

$A = \{2, 6, 8\}, B^C \cap A = \{8\}$ 이므로 남은 원소는 4, 10 이므로 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 4개이다.

10. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 을 만족시키는 집합 B 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B - A \end{aligned}$$

따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로 소이므로

$$A - B = \phi, \quad A \subset B$$

$\therefore B$ 는 2, 3을 포함하는 U 의 부분집합이므로 B 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

11. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 3, 5\}$
 $(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $\{2, 4, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
 $\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$