1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

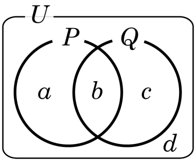
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ a와 c

해설

명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$
P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \to q$ 는 거짓이다.

3. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

4. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy의 최댓값 $\frac{9}{4}$

5. 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

x, y, z가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

6. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 ($g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0$)' 의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$

④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$

$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$

$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$

$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$

$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

7. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$　　② $\{0,\ 1\}$　　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
$x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

8. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 2개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2개이다.

9. 전체집합 $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 6, 8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수를 구하여라.

▶ **답:** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답:** 4 개

해설

$A = \{2, 6, 8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 이므로 남은 원소는 4, 10 이므로 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 4개이다.

10. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $A = \{2,\ 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$을 만족시키는 집합 B의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
$= (A \cup B) - (A \cap B)$
$= (A - B) \cup (B - A)$
$= B - A$
따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로 소이므로
$A - B = \phi$, $A \subset B$
$\therefore B$는 2, 3을 포함하는 U의 부분집합이므로 B의 개수는 $2^3 =$ 8(개)

11. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $(A-B)\cup X=X$, $(A\cup B)\cap X=X$를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A=\{x\mid x$는 8 의 약수$\}$, $B=\{x\mid x$는 5 이하의 홀수$\}$

① 2개　② 4개　③ 8개　④ 16개　⑤ 32개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\{2,\ 4,\ 8\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$

집합 X는 $A\cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{6-3}=2^3=8$(개)