1. 다음 집합이 유한집합이면 '유', 무한집합이면 '무'라고 써라. 또, 공집합이면 '공'이라고 함께 써라.

(1) $\{x \mid x$는 7보다 크고 8보다 작은 짝수$\}$
(2) $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$
(4) $\{a, b, c, d\}$
(5) $\{x \mid x$는 5로 나눌 때 나머지가 1인 자연수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (1) 유, 공

▷ 정답 : (2) 무

▷ 정답 : (3) 유

▷ 정답 : (4) 유

▷ 정답 : (5) 무

해설

(1) $\{x \mid x$는 7보다 크고 8보다 작은 짝수$\} = \varnothing$에서 공집합은 유한집합
(2) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없으므로 무한집합
(3) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있으므로 유한집합
(4) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있으므로 유한집합
(5) $\{x \mid x$는 5로 나눌 때 나머지가 1인 자연수$\}$ $=\{6, 11, 16, 21, \cdots\}$에서 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없으므로 무한집합

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$

$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$

$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 35$, $n(A \cap B^c) = 11$, $n(A^c \cap B) = 13$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$n(A \cap B)$
$= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) - n(A^c \cap B)$
$= 35 - 11 - 13 = 11$

4. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

5. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$　　② $xy > 0$　　③ $xy \ge 0$
④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$
(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

6. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

7. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$　　② 3　　③ $\sqrt{13}$　　④ 5　　⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore\ x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{a+1, 2\}$, $Q = \{3, 5, 3a-4\}$ 라 할 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 이때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로
$P \subset Q$
$\{a+1,\ 2\} \subset \{3,\ 5,\ 3a-4\}$
따라서 $3a-4=2$ 이므로 $a=2$

9. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

10. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 <u>다른</u> 하나는?

① $A \cap B$　② $A \cup \varnothing$　③ $(A \cap B) \cap A$

④ $A - B$　⑤ $A - B^c$

해설

④ $A - B = \varnothing$

12. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $(A-B)\cup X = X$, $(A\cup B)\cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A=\{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 5 이하의 홀수$\}$

① 2개　② 4개　③ 8개　④ 16개　⑤ 32개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$
$(A-B)\cup X = X$이므로 $(A-B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X = X$이므로 $X\subset(A\cup B)$
$\{2,\ 4,\ 8\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$
집합 X는 $A\cup B$의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
$\therefore\ 2^{6-3}=2^3=8$(개)