

1. 다음 집합이 유한집합이면 ‘유’, 무한집합이면 ‘무’라고 써라. 또, 공집합이면 ‘공’이라고 함께 써라.

- (1) $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 크고 } 8 \text{보다 작은 짝수}\}$
(2) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
(3) $\{2, 4, 6, \dots, 30\}$
(4) $\{a, b, c, d\}$
(5) $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{로 나눌 때 나머지가 } 1 \text{인 자연수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (1) 유, 공

▷ 정답 : (2) 무

▷ 정답 : (3) 유

▷ 정답 : (4) 유

▷ 정답 : (5) 무

해설

- (1) $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 크고 } 8 \text{보다 작은 짝수}\} = \emptyset$ 에서 공집합은 유한집합
(2) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없으므로 무한집합
(3) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있으므로 유한집합
(4) 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있으므로 유한집합
(5) $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{로 나눌 때 나머지가 } 1 \text{인 자연수}\}$
 $= \{6, 11, 16, 21, \dots\}$ 에서 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없으므로 무한집합

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 35, n(A \cap B^c) = 11, n(A^c \cap B) = 13$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & n(A \cap B) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) - n(A^c \cap B) \\ &= 35 - 11 - 13 = 11 \end{aligned}$$

4. 명제 ‘ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.’는 거짓이다.
다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$

② $x = 12$

③ $x = 10$

④ $x = 8$

⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다.
즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로
적당하다.

5. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x \geq 0, y \geq 0$

⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii)에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

6. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

7. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$$13 \geq (x + y)^2 \text{ 이므로}$$

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$$\therefore x + y \text{의 최댓값은 } \sqrt{13}$$

8. 두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{a + 1, 2\}$, $Q = \{3, 5, 3a - 4\}$ 라 할 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 이때, 상수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset Q$$

$$\{a + 1, 2\} \subset \{3, 5, 3a - 4\}$$

따라서 $3a - 4 = 2$ 이므로 $a = 2$

9. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$

s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$

q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$

따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$\therefore p \Rightarrow q$

그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

10. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$$\therefore n = 1, 2$$

n 의 갯수는 2 개이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 다른 하나는?

① $A \cap B$

② $A \cup \emptyset$

③ $(A \cap B) \cap A$

④ $A - B$

⑤ $A - B^c$

해설

④ $A - B = \emptyset$

12. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$$

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 3, 5\}$$

$$(A - B) \cup X = X \text{이므로 } (A - B) \subset X$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{이므로 } X \subset (A \cup B)$$

$$\{2, 4, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$$