

1. $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

2. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.
- $f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$
$$f(0) = 1 = -a$$
$$\therefore a = -1$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = (f^{-1} \circ f^{-1})(4)$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4))$$
$$f^{-1}(4) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 4$$
$$3k + 1 = 4 \text{ (}\because x \leq 0 \text{ 에서 } 2x + 1 \leq 1 \text{) } k = 1 \text{ 이고}$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(1)$$
$$f^{-1}(1) = m, f(m) = 1 \text{ 에서 } 2m + 1 = 1 \text{ (또는 } 3m + 1 = 1 \text{)},$$
$$m = 0$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = 0$$

3. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x ② $x + 1$ ③ $x + 2$ ④ $x + 3$ ⑤ $x + 4$

해설

$$\begin{aligned} h &= g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서} \\ h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \\ (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x))) \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = \\ g^{-1}(g(x)) &= x \end{aligned}$$

4. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

5. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x + 17$

② $-3x - 13$

③ $-3x + 13$

④ $-3x$

⑤ $-5x + 10$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x)$$

$$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$f(x) = 2x - 5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

$$\frac{y+5}{2} = x, \quad x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = -6\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) + 2 = -3x - 13$$

6. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$