

1. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$$

$$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1}$ 의 값은?

① $\frac{10}{21}$

② $\frac{11}{21}$

③ $\frac{20}{11}$

④ $\frac{21}{11}$

⑤ 2

해설

1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면 $1 + 11p = 10 \Rightarrow$

$$p = \frac{9}{11}$$

1, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면 $1 + 21q = 10 \Rightarrow$

$$q = \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

2. 등차수열 $-3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15

② 17

③ 19

④ 21

⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21은 제 9항이므로

$$21 = -3 + 8d \quad \therefore d = 3$$

따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3 , 공차가 3인 등차수열이고,
 x_4, x_5 은 각각 제 5항, 제 6항이므로

$$x_4 = -3 + (5 - 1) \cdot 3 = 9$$

$$x_5 = -3 + (6 - 1) \cdot 3 = 12$$

따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

3. 두 수 48과 2 사이에 10개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 을 넣어 12개의 수 48, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2$ 가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 200

② 250

③ 300

④ 350

⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제 12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$$

4. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11 항

② 12 항

③ 13 항

④ 14 항

⑤ 15 항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n - 1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

5. 수열 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

6. a, b, c 는 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이고, 수열 $0.a, 0.0b, 0.00c, \dots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

① $0.001\dot{5}$

② $0.001\dot{6}$

③ $0.001\dot{6}$

④ $0.001\dot{7}$

⑤ $0.001\dot{7}$

해설

$$0.\dot{a} = \frac{a}{9}, 0.0\dot{b} = \frac{b}{90}, 0.00\dot{c} = \frac{c}{900} \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900} \text{ 에서 } b^2 = ac$$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로 $a = 2, b = 4, c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9}, \frac{4}{90}, \frac{8}{900}, \dots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$$

7. 수열 1, 101, 10101, 1010101, ... 에서 제100항은?

① $\frac{10^{200} - 1}{99}$

② $\frac{10^{202} - 1}{99}$

③ $10^{201} - 1$

④ $\frac{10^{402} - 1}{99}$

⑤ $10^{401} - 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10^2 + 1$$

$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$

$$= \frac{1 \{ (10^2)^n - 1 \}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99} (10^{2n} - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{1}{99} (10^{200} - 1)$$

8. 수열 9, 99, 999, 9999, ... 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(10^n - 1) - n$

② $\frac{1}{9}(10^n - 1)$

③ $\frac{8}{9}(10^n - 1) - n$

④ $\frac{10}{9}(10^n - 1)$

⑤ $\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

해설

$$9 = 10 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, \dots, \underbrace{99 \cdots 9}_{n\text{개}} = 10^n - 1$$

이므로 구하는 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \cdots 9}_{n\text{개}} \\ &= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots \\ &\quad + (10^n - 1) \\ &= (10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - n \\ &= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n \end{aligned}$$