

1. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의

최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

2. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

3. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$

4. a, b, c 는 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이고, 수열 $0.a, 0.0b, 0.00c, \dots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

- ① $0.00\dot{1}\dot{5}$
- ② $0.00\dot{1}\dot{6}$
- ③ $0.001\dot{6}$
- ④ $0.001\dot{7}$
- ⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \frac{a}{9}, 0.0\dot{b} = \frac{b}{90}, 0.00\dot{c} = \frac{c}{900}$ 이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900}$ 에서 $b^2 = ac$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고
 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로 $a = 2, b = 4, c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9}, \frac{4}{90}, \frac{8}{900}, \dots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$

5. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a_3 = 36$
- ㉡ $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
- ㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 등차수열이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$
 $a_1 = S_1 = 4$ 이므로
 $a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$
㉠ $a_3 = 36$
㉡ $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.
㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$ 인 등차수열이다.

6. $a_1 = 8, a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

$$a_4 = 8 \times r^3 = 1 \text{ 에서 } r^3 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ 이므로 } a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right\}^2 = 2 \log_2 2^{-2n+4}$$

$$= 2(-2n+4) = -4n+8$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$$\therefore c - d = 8$$